

**EEM-MOM**

**理論説明書**

**株式会社 EEM**

## 目次

1	概要	3
2	モーメント法による定式化	4
3	行列要素	6
4	入射界	7
4.1	平面波入射	7
4.2	アンテナの給電点	7
5	近傍界	8
6	遠方界	9
7	アンテナ特性	10
7.1	入力インピーダンス	10
7.2	利得	10
7.3	結合度	11
7.4	全損失	11
8	散乱特性	12
9	連立1次方程式の解法	13
9.1	修正コレスキー法	13
9.2	修正コレスキー法の並列化	14
9.3	共役勾配法	15
9.4	共役勾配法の並列化	16
9.5	LU法の並列化	16
10	グラウンド板	18
	参考文献	19
	付録A 遠方界の軸比	20
	付録B 遠方界成分の関係	20
	付録C 電磁界ベクトルの時間平均	20
	付録D 特定方向の電磁界成分の時間平均	21

# 1 概要

## (目的)

本ソフトウェアは、線状または面状の完全導体から成るアンテナまたは散乱体の電磁気的特性を数値解析するものである。

## (基礎方程式)

基本となる方程式は、MAXWELL の方程式から導かれる電磁界のポテンシャル表示に境界条件を適用した積分方程式[1]-[11]である。

これをモーメント法[3][4]により数値解析する。

連立一次方程式の解法には直接法(修正コレスキー法またはLU法)または反復法(共役勾配法)を用いる。

## (離散化法)

解析対象の離散化法としては、線状素子については線に沿って分割し、面状素子については、導線網に置き換える。(ワイヤグリッドモデル[2])

## (波源)

アンテナの場合は、導線上の1部に給電点を設定する。

散乱体の場合は、遠方からの平面波を波源とする。

## (解析機能)

導線上の電流分布を計算し、これより、近傍及び遠方の電磁界分布を計算する。さらに、アンテナまたは散乱体の各種の特性を計算する。

## (CPU 並列計算)

複数のコア、CPU を用いて並列計算することができる。

## (GPU 並列計算)

GPU を用いて高速に並列計算することができる。[18]

## 2 モーメント法による定式化

図 2.1 のように、面状素子は格子線網に置き換え(ワイヤグリッドモデル)、線状素子は線に沿って分割する。これにより、すべての面状及び線状の素子は、線状要素の集まりとみなすことができる。線状導体表面上で、電界の軸方向成分が 0 であるという境界条件より、次式が得られる。[3][4]

$$-E_l^i = -j\omega A_l - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \quad (\text{on } S) \quad (2.1)$$

$$A = \mu_0 \int_{axis} I(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (2.2)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{axis} \sigma(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (2.3)$$

$$\sigma = \frac{-1}{j\omega} \frac{dI(l)}{dl} \quad (\text{連続の式}) \quad (2.4)$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (2.5)$$

ここで  $l$  は軸方向に沿った長さ、 $E_l^i$  はアンテナでは印加電界、散乱問題では入射電界の接線成分である。また、時間因子  $e^{j\omega t}$  は省略する。

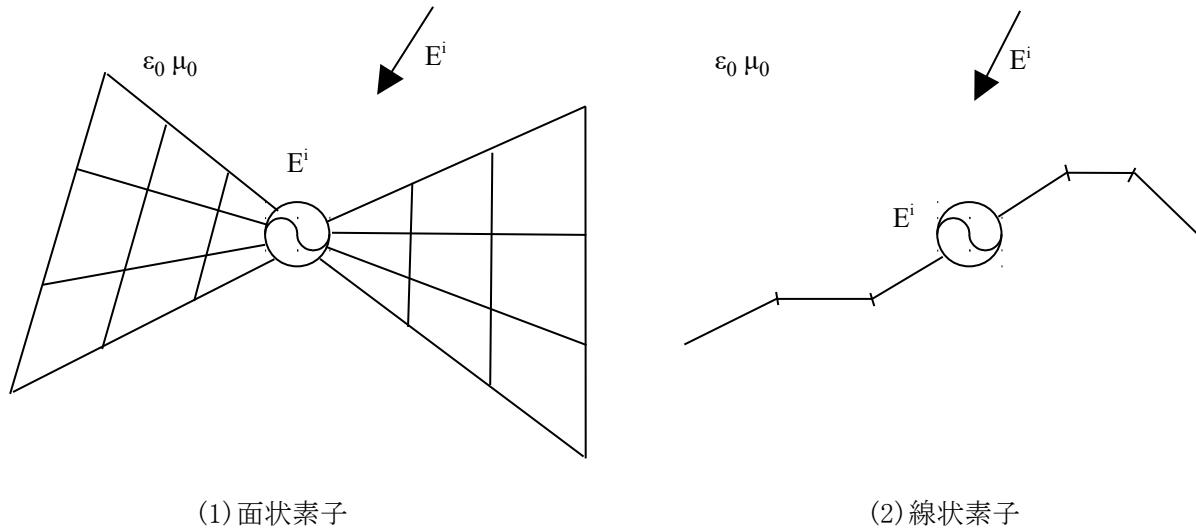


図 2.1 面状・線状素子とその要素分割

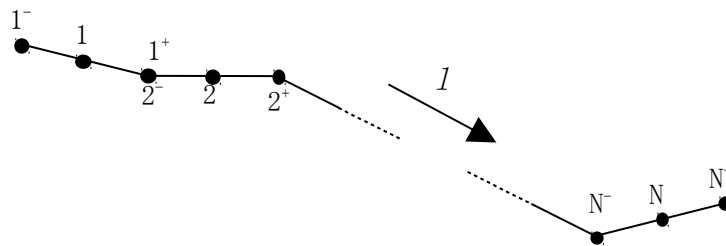


図 2.2 要素番号の与えかた

各要素内では、電流(I)、電荷( $\sigma$ )は一定とする。式(2.1)を要素  $m(m=1, \dots, N)$  に沿って積分すると次式を得る。(N:線状要素の総数)

$$-E_l^i(m)\Delta l_m = -j\omega A_l(m)\Delta l_m - \{\Phi(m^+) - \Phi(m^-)\} \quad (2.6)$$

$$A(m) = \mu_0 \sum_{n=1}^N I(n) \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (R = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|) \quad (2.7)$$

$$\Phi(m^+) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \sigma(n^+) \int_{\Delta l_n^+} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (R = |\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^+|) \quad (2.8)$$

$$\sigma(n^+) = \frac{-1}{j\omega} \frac{I(n+1) - I(n)}{\Delta l_n^+} \quad (2.9)$$

$\Phi(m^-), \sigma(n^-)$  についても同様である。

また、 $\Delta l_n$  は要素nの長さであり、 $\Delta l_n^+, \Delta l_n^-$  はそれぞれ半要素ほど前後にシフトしたものである。

以上から電流 I(n) についてまとめると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I(n) = V(m) \quad (m=1, \dots, N) \quad (2.10)$$

$$Z_{mn} = \frac{-jZ}{k} \left[ \{\Psi(n^+, m^+) - \Psi(n^+, m^-) - \Psi(n^-, m^+) + \Psi(n^-, m^-)\} - k^2 (\Delta \mathbf{l}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_m) \Psi(n, m) \right] \quad (2.11)$$

$$V(m) = E_l^i(m) \Delta l_m \quad (2.12)$$

ここで

$$\Psi(n, m) = \frac{1}{\Delta l_n \Delta l_m} \int \frac{e^{-jkR_m}}{4\pi R_m} dl \quad (R_m = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|) \quad (2.13)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{波動インピーダンス}) \quad (2.14)$$

である。

なお、素子nに  $Z_L$  の負荷がかかっている場合は対角成分を次式のように変える。

$$Z_{mn} \rightarrow Z_{mn} + Z_L \quad (2.15)$$

行列  $Z_{mn}$  は対称行列である。

連立一次方程式(2.10)を解き、その解である電流分布  $I(n)(n=1, \dots, N)$  からアンテナ、散乱体の電磁気的特性を計算することができる。

### 3 行列要素

式(2.11)より行列要素の計算は式(2.13)に帰着する。

式(2.13)は、 $m \neq n$  のとき

$$\Psi(n, m) = \frac{e^{-jk R_{mn}}}{4\pi R_{mn}} \quad (3.1)$$

となり、 $m=n$  のとき、Taylor 展開により、

$$\begin{aligned} \Psi(n, n) &= \frac{1}{4\pi \Delta l_n} \int_{n^-}^{n^+} \left( \frac{1}{R_n} - jk \right) dl \\ &= \frac{1}{4\pi \Delta l_n} \int_{-\frac{\Delta l_n}{2}}^{+\frac{\Delta l_n}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{l^2 + a_n^2}} - jk \right) dl \\ &= \frac{1}{2\pi \Delta l_n} \log \left\{ \frac{\Delta l_n}{2a_n} + \sqrt{\left( \frac{\Delta l_n}{2a_n} \right)^2 + 1} \right\} - \frac{jk}{4\pi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる。

ただし、 $a_n$  は要素  $n$  の導線の半径であり、 $\Psi(n^+, n^+), \Psi(n^-, n^-)$  については、 $\Delta l_n$  をそれぞれ

$\Delta l_n^+, \Delta l_n^-$  に置き換える。

## 4 入射界

### 4.1 平面波入射

原点から見た入射方向を  $(r^i, \theta^i, \phi^i)$  とすると、入射電磁界は次式で計算される。

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\hat{\theta}^i \exp(jk \mathbf{r} \cdot \hat{r}^i) & (\text{垂直偏波}) \\ +\hat{\phi}^i \exp(jk \mathbf{r} \cdot \hat{r}^i) & (\text{水平偏波}) \\ \frac{\hat{\theta}^i \pm j \hat{\phi}^i}{\sqrt{2}} \exp(jk \mathbf{r} \cdot \hat{r}^i) & (\text{円偏波}) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$Z \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = -\hat{r}^i \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

ここで、 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  は、それぞれ  $r, \theta, \phi$  方向の単位ベクトルであり次式で計算される。

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \hat{\theta} &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \hat{\phi} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 4.2 アンテナの給電点

アンテナの場合は、 $\delta$  関数給電とする。すなわち、印加電圧の式(2.12)のうち、有限個が非0となる。

$$V(m) = \begin{cases} V_i & m \in \text{給電点 } i \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (4.4)$$

複数の給電点も設定できる。 $V_i$ は複素数であり任意の振幅と位相が設定できる。

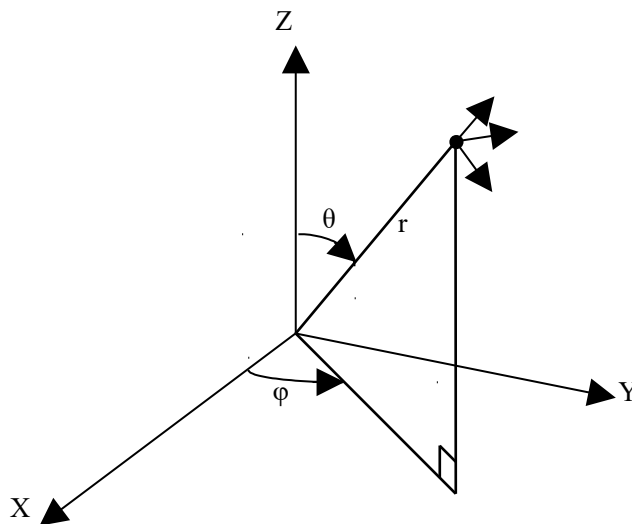


図 4.1 座標系

## 5 近傍界

線状電流波源のつくる電磁界は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{jZ}{k} \left\{ \nabla \int I(l) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l})}{\partial l} dl - k^2 \int I(l) \hat{l} G(\mathbf{r}, \mathbf{l}) dl \right\} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int I(l) \hat{l} G(\mathbf{r}, \mathbf{l}) dl \quad (5.2)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{l}|) \quad (5.3)$$

ここで、 $\hat{l}$  は導線に沿った単位接線ベクトルである。

式(5.1)(5.2)のp成分(p=x, y, z)は、

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{jZ}{k} \left[ \int I(l) \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l})}{\partial l} \right\} dl - k^2 \int I(l) (\hat{p} \cdot \hat{l}) G(\mathbf{r}, \mathbf{l}) dl \right] \quad (5.4)$$

$$H_p(\mathbf{r}) = \int I(l) (\hat{p}'' \cdot \hat{l}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l})}{\partial p'} dl - \int I(l) (\hat{p}' \cdot \hat{l}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l})}{\partial p''} dl \quad (5.5)$$

となる。ただし、 $(p, p', p'')$  は  $(x, y, z)$  を cyclic に置換したものである。

各要素について離散化すると、

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l}_n)}{\partial l} = \frac{1}{\Delta l_n} \{ G(\mathbf{r}, \mathbf{l}_n^+) - G(\mathbf{r}, \mathbf{l}_n^-) \} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{l}_n)}{\partial p} = - \frac{(1 + jkR_n)(\mathbf{R}_n \cdot \hat{p}) e^{-jkR_n}}{4\pi R_n^3} \quad (\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{l}_n, \quad R_n = |\mathbf{R}_n|) \quad (5.7)$$

を用いて、

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{jkZ}{4\pi} \sum_{n=1}^N I(n) \left\{ - \frac{1 + jkR_n^+}{(kR_n^+)^2} \frac{p - p_n^+}{R_n^+} e^{-jkR_n^+} + \frac{1 + jkR_n^-}{(kR_n^-)^2} \frac{p - p_n^-}{R_n^-} e^{-jkR_n^-} - \frac{(k\Delta l_n)}{(kR_n)} (\hat{p} \cdot \hat{l}_n) e^{-jkR_n} \right\} \quad (5.8)$$

$$H_p(\mathbf{r}) = \frac{-k}{4\pi} \sum_{n=1}^N I(n) \frac{(1 + jkR_n)(k\Delta l_n)}{(kR_n)^2} e^{-jkR_n} \left\{ (\hat{p}'' \cdot \hat{l}_n) \frac{p' - p_n'}{R_n} - (\hat{p}' \cdot \hat{l}_n) \frac{p'' - p_n''}{R_n} \right\} \quad (5.9)$$

$$(\mathbf{R}_n^\pm = |\mathbf{r} - \mathbf{l}_n^\pm|, \quad \mathbf{l}_n^\pm = (x_n^\pm, y_n^\pm, z_n^\pm), \quad \mathbf{l}_n = (x_n, y_n, z_n))$$

を得る。



## 6 遠方界

遠方  $(r, \theta, \phi)$  では、電界の式(5.8)の{ }内第3項が支配的になり、

$$E_{\left\{\begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix}\right\}}(r, \theta, \phi) = \frac{-jk \exp(-jkr)}{4\pi r} F_{\left\{\begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix}\right\}}(\theta, \phi) \quad (6.1)$$

$$F_{\left\{\begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix}\right\}}(\theta, \phi) = Z \sum_{n=1}^N I(n) \Delta l_n \left\{ \begin{array}{l} (\hat{l}_n \cdot \hat{\theta}) \\ (\hat{l}_n \cdot \hat{\phi}) \end{array} \right\} \exp(jk \mathbf{l}_n \cdot \hat{r}) \quad (6.2)$$

となる。

遠方界の主軸と副軸は次式で計算される。(付録A)

$$E_{\left\{\begin{smallmatrix} max \\ min \end{smallmatrix}\right\}} = \left[ \frac{1}{2} \left\{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \pm |E_\theta + E_\phi|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

これから遠方界の軸比は次式で計算される。

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = \left\{ \frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 - |E_\theta + E_\phi|^2}{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + |E_\theta + E_\phi|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

遠方界の右(左)旋円偏波電界は次式で計算される。

$$E_{\left\{\begin{smallmatrix} RHCP \\ LHCP \end{smallmatrix}\right\}} = \frac{E_\theta \pm jE_\phi}{\sqrt{2}} \quad (6.5)$$

付録Cから以下の関係がある。

$$E_{max}^2 + E_{min}^2 = |E_{RHCP}|^2 + |E_{LHCP}|^2 = |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \quad (6.6)$$

## 7 アンテナ特性

### 7.1 入力インピーダンス

給電点の要素番号を $m_0$ とすると、入力インピーダンスおよび入力アドミッタンスは次式で与えられる。

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} \quad (V_{in} = V(m_0), I_{in} = I(m_0)) \quad (7.1)$$

$$Y_{in} = G_{in} + jB_{in} = \frac{1}{Z_{in}} \quad (7.2)$$

給電線の特性インピーダンスを $Z_0[\Omega]$ とすると、反射係数は次式で計算される。

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad (7.3)$$

VSWRおよび反射損は次式で計算される。

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (7.4)$$

$$\text{反射損} = 20 \log_{10} |\Gamma| \quad [dB] \quad (7.5)$$

### 7.2 利得

遠方界より、電力利得 $G_p$ 、指向性利得 $G_d$ 、放射効率 $\eta$ が次式で計算される。[4]

$$\begin{aligned} G_p(\theta, \phi) &= \frac{1}{P_{in}} \frac{4\pi r^2}{2Z} \{ |E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \} \\ &= \frac{k^2}{8\pi Z P_{in}} \{ |F_\theta(\theta, \phi)|^2 + |F_\phi(\theta, \phi)|^2 \} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta} G_p(\theta, \phi) \quad (7.7)$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta G_p(\theta, \phi) \quad (7.8)$$

ここで $P_{in}$ は次式で計算される給電電力である( $n$ は給電点に関する和)。

$$P_{in} = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_{in}(n) I_{in}^*(n)) & (\text{反射損なし}) \\ \sum_n \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_{in}(n) I_{in}^*(n))}{1 - |\Gamma(n)|^2} & (\text{反射損あり}) \end{cases} \quad (7.9)$$

損失性媒質(抵抗)がなく、かつ、反射損を考えないときは放射効率は1となり、電力利得と指向性利得は一致する。このとき、放射効率の1からの差は計算誤差の指標になる。

### 7.3 結合度

給電ユニットと負荷ユニットの抵抗があるとき、給電点と抵抗の結合度は次式で計算される。ここで、 $R_L(n)$ は抵抗値、 $I_L(n)$ は抵抗を流れる電流である(Re:実部、\*:複素共役)。分子は抵抗で消費される電力、分母は給電電力の和である。

$$C_n = \frac{\frac{1}{2} R_L(n) |I_L(n)|^2}{\sum_i \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_{in}(i) I_{in}^*(i)\}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.10)$$

抵抗値には適当な値(例えば入力抵抗)を与える。

### 7.4 全損失

抵抗があるとき次式で全損失が計算される。

$$P_{loss} = \sum_n \frac{1}{2} R_L(n) |I_L(n)|^2 \quad (7.11)$$

## 8 散乱特性

平面波入射のとき、遠方界より散乱断面積が次式で定義される。(E<sup>i</sup>:入射電界の大きさ)

$$\begin{aligned}\sigma(\theta, \phi) &= \frac{4\pi r^2}{(E^i)^2} \left\{ |E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right\} \\ &= \frac{k^2}{4\pi (E^i)^2} \left\{ |F_\theta(\theta, \phi)|^2 + |F_\phi(\theta, \phi)|^2 \right\}\end{aligned}\quad (8.1)$$

また、原点から見た入射方向を  $(\theta^i, \phi^i)$  とすると、次式で前方、後方および全散乱断面積が定義される。

$$\sigma_F = \sigma(\pi - \theta^i, \pi + \phi^i) \quad (8.2)$$

$$\sigma_B = \sigma(\theta^i, \phi^i) \quad (8.3)$$

$$\sigma_T = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \sigma(\theta, \phi) \quad (8.4)$$

特に、全散乱断面積と前方散乱電界との間に光学定理と呼ばれる関係式が成り立つ。

$$\sigma_T + \frac{P_{loss}}{2Z} = \frac{-1}{E^i} \operatorname{Re} \left\{ F_{\left[ \begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix} \right]}(\pi - \theta^i, \pi + \phi^i) \right\} \quad (8.5)$$

右辺の複号は入射波の偏波方向に対応する。P<sub>loss</sub>は式(7.11)で定義された全損失である。式(8.5)の誤差は計算誤差の指標になる。

## 9 連立1次方程式の解法

本章では連立1次方程式を

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad (9.1)$$

と表示し、 $N$ を行列の大きさとする。行列 $A$ は複素数対称密行列である。

### 9.1 修正コレスキー法

修正コレスキー法は対称密行列用の直接法であり、アルゴリズムは以下の通りである。[12]  
まず、行列 $A$ を

$$A=LDL^T \quad (9.2)$$

と分解する。ここで $L$ は対角要素がすべて1の左下三角行列、 $D$ は対角行列である。式(9.2)のように分解するアルゴリズムは以下の通りである。

$$\begin{aligned} i &= 0, \dots, N-1 \\ j &= 0, \dots, i-1 \\ w_j &= a_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} w_k l_{jk} \\ l_{ij} &= w_j d_j^{-1} \\ d_i &= a_{ii} - \sum_{j=0}^{i-1} w_j l_{ij} \end{aligned} \quad (9.3)$$

ここで $w$ は作業用の配列である。また、行列 $l$ は行列 $a$ で置き換えることが可能であり余分に配列をとる必要はない。

次に連立1次方程式(9.1)を

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b} \quad (9.4)$$

$$DL^T\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad (9.5)$$

と表し、解  $\mathbf{x}$  を次式の前進・後退代入により求める。

$$y_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} l_{ij} y_j \quad (i=0, \dots, N-1) \quad (9.6)$$

$$x_i = d_i^{-1} y_i - \sum_{j=i+1}^{N-1} l_{ji} x_j \quad (i=N-1, \dots, 0) \quad (9.7)$$

単精度で発散する計算例は確認されていないので単精度で計算してよい。

行列の対称性のため、必要メモリーは単精度で $4N^2$ バイトである。

計算の主要部は式(9.3)の第3行であり、 $N^3/6$ 回の乗算と $N^3/6$ 回の加算が必要である。

なお、SIMDベクトル演算では式(9.3)を次式のように書き換えるとループ $j$ についてベクトル演算するのに便利である。ここで式(9.8)の第3式はpacked演算が対角線成分を含むことがあるために必要である。

$$\begin{aligned}
& i=0, \dots, N-1 \\
& \quad d_i = a_{ii} \\
& \quad a_{ii} = 0 \\
& i=0, \dots, N-1 \\
& \quad j=0, \dots, i-1 \\
& \quad w_j = a_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} w_k a_{jk} \\
& \quad a_{ij} = w_j d_j^{-1} \\
& \quad d_i = d_i - w_j a_{ij}
\end{aligned} \tag{9.8}$$

## 9.2 修正コレスキー法の並列化

修正コレスキー法をマルチスレッドで並列計算する方法は以下の通りである。

行方向にスレッド数の行ずつ分割し、各ブロックについてまず、図9.1の黒丸部分について計算を行う。各スレッドが1行を担当する。式(9.3)からわかるように変数はすでに計算されているので並列計算することができる。

次に、白丸部分については、変数の依存関係から並列計算できないので逐次計算する。

以上の計算を繰り返すことによって式(9.2)の分解が完成する。

式(9.6)(9.7)の前進・後退代入は並列計算できないので逐次計算する。この部分の計算時間は $N^2$ のオーダーであるから式(9.3)に比べれば無視することができる。

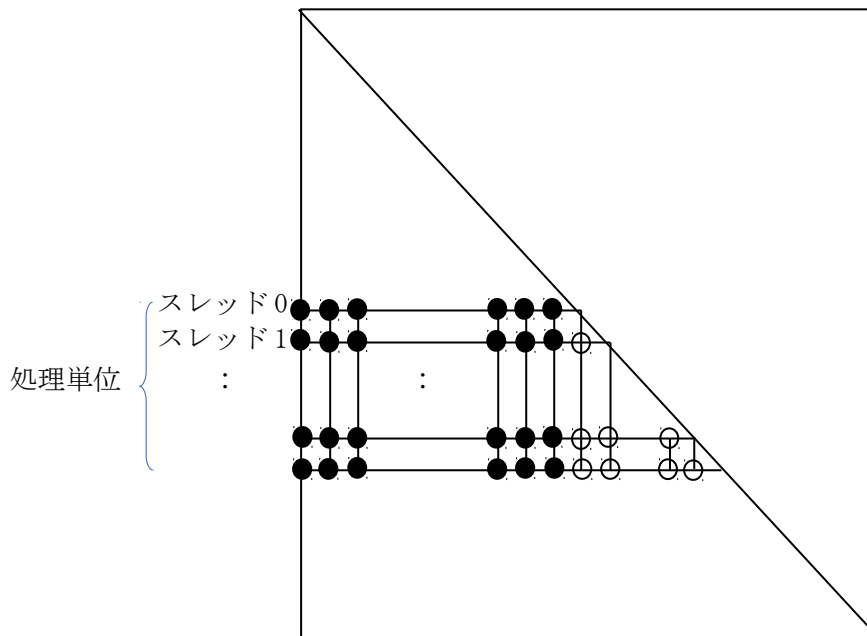


図9.1 修正コレスキー法の並列化(●:並列計算、○:逐次計算)

### 9.3 共役勾配法

共役勾配法 (CG 法: Conjugate Gradient method) は対称行列用の反復法であり、そのアルゴリズムは以下の通りである。 [12]-[14]

(1) 適当な初期ベクトル  $\mathbf{x}_0$  を選んで次の計算を行う。

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A \mathbf{x}_0 \quad (9.9)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \quad (9.10)$$

(2)  $n=0, 1, 2, \dots$  について次の手順を繰り返す。 ( $\varepsilon$  : 適当な微小量)

$$\mathbf{u}_n = A \mathbf{p}_n \quad (9.11)$$

$$\alpha_n = \frac{(\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n)}{(\mathbf{p}_n, \mathbf{u}_n)} \quad (9.12)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{p}_n \quad (9.13)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n - \alpha_n \mathbf{u}_n \quad (9.14)$$

$$\frac{\|\mathbf{r}_{n+1}\|}{\|\mathbf{b}\|} < \varepsilon \quad \text{ならば終了する} \quad (9.15)$$

$$\beta_n = \frac{(\mathbf{r}_{n+1}, \mathbf{r}_{n+1})}{(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n)} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{r}_{n+1} + \beta_n \mathbf{p}_n \quad (9.17)$$

ここで  $\|\mathbf{x}\|$  はベクトルのノルム、 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  はベクトルの内積である。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &\equiv \left\{ \sum_i |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \sum_i x_i y_i \end{aligned} \quad (9.18)$$

共役勾配法の計算時間は式(9.11)の行列ベクトル積が大部分を占め、 $N^2$ 回の乗算と  $N^2$ 回の加算が必要である。

これから収束反復回数が  $N/6$  以下であれば修正コレスキー法より計算時間が短くなる。

収束反復回数は行列の性質に大きく左右される。隣接する要素の長さや半径の不連続度が大きいときに収束が遅くなる傾向がある。

単精度で発散する計算例は確認されていないので単精度で計算してよい。

行列の対称性のため、必要メモリーは単精度で  $4N^2$  バイトである。

図 9.2 に収束状況の一例を示す。振動しながら収束することがわかる。収束判定条件は残差  $= 1e-5$  が標準的な値である。

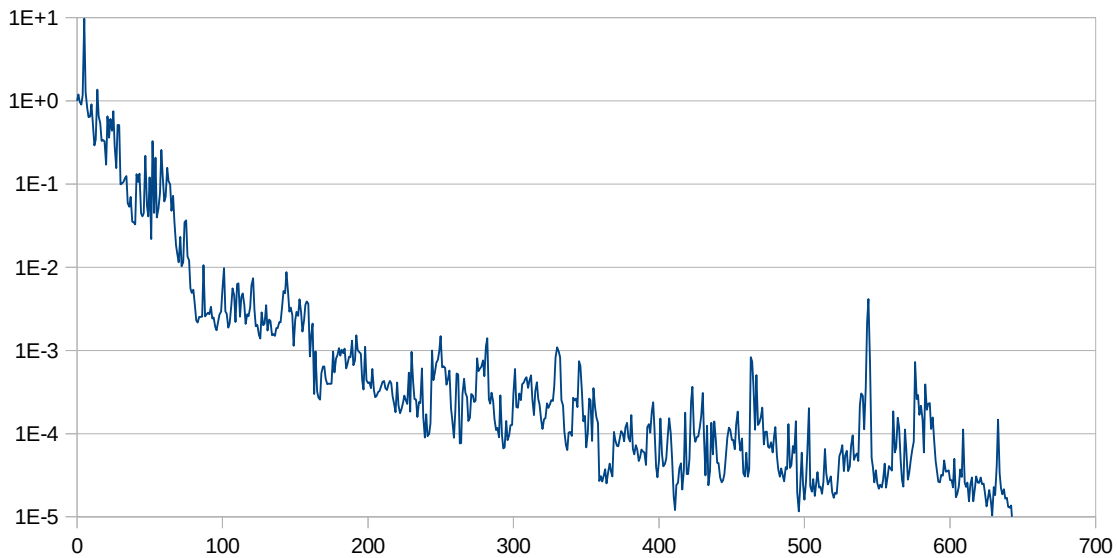


図 9.2 共役勾配法の収束状況の一例(横軸：反復回数、縦軸：残差=式(9.15)の左辺)

#### 9.4 共役勾配法の並列化

計算時間の大部分を占める式(9.11)を並列計算する。

行方向にスレッド数の行ずつ分割し、1スレッドが1行を計算する。

本方法はスレッド数の少ないCPUとスレッド数の多いGPUの両方で使用することができる。

ただし、行列の対称性を利用することができないので行列全体を持つ必要があり、必要メモリーは単精度で $8N^2$ バイトである。

#### 9.5 LU法の並列化

GPUなどの超並列(スレッド数が数百以上)では、修正コレスキー法は並列計算の効率が悪いので、LU法の外積形式ガウス法を用いる。[15]-[17]

LU法は非対称密行列用の直接法である。

まず、行列Aを以下のようにしてLU分解する。

$$\begin{aligned}
 &k=0, \dots, N-1 \\
 &\quad i=k+1, \dots, N-1 \\
 &\quad\quad a_{ik} = a_{ik} / a_{kk} \\
 &\quad i=k+1, \dots, N-1 \\
 &\quad\quad j=k+1, \dots, N-1 \\
 &\quad\quad\quad a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

続いて右辺ベクトルbを与え、解xを次式の前進・後退代入で求める。

$$\begin{aligned}
 &i=0, \dots, N-1 \\
 &\quad x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j
 \end{aligned} \tag{9.20}$$



$$i = N-1, \dots, 0$$

$$x_i = \left\{ x_i - \sum_{j=i+1}^{N-1} a_{ij} x_j \right\} / a_{ii} \quad (9.21)$$

式(9.19)の第6行が計算時間の大部分を占め、 $N^3/3$ 回の乗算と $N^3/3$ 回の加算が必要である、これは修正コレスキー法の2倍である。そして、式からわかるように  $ij$  の2重ループ内でアドレス  $a_{ij}$  へのアクセスが競合しないので並列計算が可能である。

また、式(9.19)の第3式も並列計算が可能である。

式(9.20) (9.21)の前進・後退代入は並列計算できないのでCPUで逐次計算する。そのために、分解を終えた行列AをGPUからCPUに転送する必要がある。前進・後退代入の演算量は $N^2$ のオーダーであるから、式(9.19)に比べれば無視することができる。

LU法では対称行列であっても行列全体を持つ必要があり、必要メモリーは単精度で $8N^2$ バイトである。

## 10 グラウンド板

$z=0$  面を完全導体のグラウンド板とする。以下ではベクトルの  $z$  成分のみの符号を反転したものを  $\bar{\quad}$  で表す。

電流波源  $I\hat{l}$  の鏡影は  $-I\bar{\hat{l}}$  となり、式(2.11)のインピーダンス行列は次式になる。

$$Z_{mn} = \frac{-jZ}{k} \left[ \left\{ \Psi(n^+, m^+) - \Psi(n^+, m^-) - \Psi(n^-, m^+) + \Psi(n^-, m^-) \right\} - k^2 (\Delta \mathbf{l}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_m) \Psi(n, m) \right. \\ \left. - \left\{ \Psi(\bar{n}^+, m^+) - \Psi(\bar{n}^+, m^-) - \Psi(\bar{n}^-, m^+) + \Psi(\bar{n}^-, m^-) \right\} + k^2 (\Delta \bar{\mathbf{l}}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_m) \Psi(\bar{n}, m) \right] \quad (10.1)$$

平面入射波の電磁界は式(4.1)(4.2)に鏡影項を加えたものになる。 ( $\bar{\hat{\phi}}^i = \hat{\phi}^i$ )

$$\mathbf{E}_I^i(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_I^i(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_I^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} +\bar{\hat{\theta}}^i \exp(jk \mathbf{r} \cdot \bar{\hat{r}}^i) & (\text{垂直偏波}) \\ -\hat{\phi}^i \exp(jk \mathbf{r} \cdot \bar{\hat{r}}^i) & (\text{水平偏波}) \\ -\frac{\bar{\hat{\theta}}^i \pm j\hat{\phi}^i}{\sqrt{2}} \exp(jk \mathbf{r} \cdot \bar{\hat{r}}^i) & (\text{円偏波}) \end{cases} \quad (10.2)$$

$$Z\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \rightarrow Z\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + Z\mathbf{H}_I^i(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}_I^i(\mathbf{r}) = -\bar{\hat{r}}^i \times \mathbf{E}_I^i(\mathbf{r}) \quad (10.3)$$

近傍電磁界は式(5.8)(5.9)に鏡影による部分を加えたものになる。

遠方界は式(6.2)が次式のようにになる。

$$F_{\begin{matrix} \theta \\ \phi \end{matrix}}^i(\theta, \phi) = Z \sum_{n=1}^N I(n) \Delta l_n \left[ \begin{matrix} \left( \begin{matrix} \hat{l}_n \cdot \hat{\theta} \\ \hat{l}_n \cdot \hat{\phi} \end{matrix} \right) \exp(jk \mathbf{l}_n \cdot \hat{r}) \\ - \left( \begin{matrix} \bar{\hat{l}}_n \cdot \hat{\theta} \\ \bar{\hat{l}}_n \cdot \hat{\phi} \end{matrix} \right) \exp(jk \bar{\mathbf{l}}_n \cdot \hat{r}) \end{matrix} \right] \quad (10.4)$$

## 参考文献

- [1] K.K.Meï, "On the Integral Equations of Thin-Wire Antennas", IEEE Trans. Antennas & Propagation, vol.AP-13, No. 3, pp. 374-378, May 1965
- [2] J.H.Richmond, "A Wire-Grid Model for Scattering by Conducting Bodies," IEEE Trans. Antennas & Propagation, vol.AP-14, No. 6, pp. 782-786, Nov. 1966.
- [3] R.F.Harrington, "Matrix Methods for Field Problems", Proc. IEEE, vol. 55, No. 2, pp. 136-149, Feb. 1967
- [4] R.F.Harrington, *Field computation by moment methods*, ch.4, New York Macmillan 1968, Krieger 1982(Reprint).
- [5] E.H.Newman and D.M.Pozar, "Electromagnetic Modeling of Composite Wire and Surface Geometries", IEEE Antennas & Propagation, vol.AP-26, No. 6, pp. 784-789, Nov. 1978.
- [6] G.J.Burke and A.J.Poggio, *Numerical Electromagnetic Code (NEC) - Method of Moments, Part - I : Theory*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1981.
- [7] S.M.Rao, D.R.Wilton and A.W.Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape", IEEE Trans. Antennas & Propagation, vol.AP-30, No. 3, pp. 409-418, May 1982.
- [8] J.Moore and R. Pizer ed., *Moment Methods in Electromagnetics: Techniques and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [9] J.J.H.Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [10] W.L.Stutzman and G.A.Thiele, *Antenna Theory and Design, 2nd edition*, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [11] 山下栄吉編著「電磁波問題解析の実際」電子情報通信学会、コロナ社、第3章、1993
- [12] 森正武「FORTRAN77 数値計算プログラミング（増補版）」岩波書店、1988
- [13] 戸川隼人「共役勾配法」教育出版、1977
- [14] 森正武「数値解析、第2版」共立出版、2002
- [15] 渡辺力、名取亮、小国力監修「Fortran77による数値計算ソフトウェア」丸善、1989
- [16] 小国力編著「行列計算ソフトウェア」丸善、1991
- [17] 金田康生「並列数値処理-高速化と性能向上のために-」コロナ社、2010
- [18] <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>

## 付録 A 遠方界の軸比

遠方界を時間表示すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \text{Re}\{(E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi})e^{j\omega t}\} \\ &= \hat{\theta} \text{Re}(E_\theta e^{j\omega t}) + \hat{\phi} \text{Re}(E_\phi e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

となり、その大きさは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(t)|^2 &= \left\{ \text{Re}(E_\theta e^{j\omega t}) \right\}^2 + \left\{ \text{Re}(E_\phi e^{j\omega t}) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{E_\theta e^{j\omega t} + \bar{E}_\theta e^{-j\omega t}}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{E_\phi e^{j\omega t} + \bar{E}_\phi e^{-j\omega t}}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2}(E_\theta \bar{E}_\theta + E_\phi \bar{E}_\phi) + \frac{1}{4} \left\{ (E_\theta^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_\theta^2 e^{-2j\omega t}) + (E_\phi^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_\phi^2 e^{-2j\omega t}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + \text{Re}\{(E_\theta^2 + E_\phi^2)e^{2j\omega t}\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

ここでは複素共役を表す。式(A.2)から時間的的最大値と最小値は次式で与えられる。その比が軸比である。

$$E_{\left\{ \begin{smallmatrix} \text{max} \\ \text{min} \end{smallmatrix} \right\}} = \left\{ \frac{1}{2} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \pm |E_\theta^2 + E_\phi^2|) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A. 3})$$

また、時間的な平均値は次式で与えられる。

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \quad (\text{A. 4})$$

## 付録 B 遠方界成分の関係

遠方界の各成分には以下の関係がある。

$$\begin{aligned} E_{\max}^2 + E_{\min}^2 &= \frac{1}{2} \{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + |E_\theta^2 + E_\phi^2| \} + \frac{1}{2} \{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 - |E_\theta^2 + E_\phi^2| \} \\ &= |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

$$\begin{aligned} |E_{RHCP}|^2 + |E_{LHCP}|^2 &= \frac{1}{2} (|E_\theta + jE_\phi|^2 + |E_\theta - jE_\phi|^2) \\ &= \frac{1}{2} \{ (E_\theta + jE_\phi)(\bar{E}_\theta - j\bar{E}_\phi) + (E_\theta - jE_\phi)(\bar{E}_\theta + j\bar{E}_\phi) \} \\ &= E_\theta \bar{E}_\theta + E_\phi \bar{E}_\phi \\ &= |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

## 付録 C 電磁界ベクトルの時間平均

時刻 t の電界ベクトルは以下のようになる。ここで、 $E_x, E_y, E_z$  は複素数である。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \hat{x} \text{Re}(E_x e^{j\omega t}) + \hat{y} \text{Re}(E_y e^{j\omega t}) + \hat{z} \text{Re}(E_z e^{j\omega t}) \\ &= \hat{x} \frac{1}{2} (E_x e^{j\omega t} + \bar{E}_x e^{-j\omega t}) + \hat{y} \frac{1}{2} (E_y e^{j\omega t} + \bar{E}_y e^{-j\omega t}) + \hat{z} \frac{1}{2} (E_z e^{j\omega t} + \bar{E}_z e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

式(C-1)の長さの2乗は以下のようになる。

$$|\mathbf{E}(t)|^2 = \frac{1}{4} \left( E_x^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_x^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_x|^2 + E_y^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_y^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_y|^2 + E_z^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_z^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_z|^2 \right) \quad (C-2)$$

式(C-2)の時間平均は以下のようになる。

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \right) \quad (C-3)$$

ここで式(C-4)のように定義すると式(C-3)は式(C-5)になる。

$$E = \left\{ |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \right\}^{1/2} \quad (C-4)$$

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} E^2 \quad (C-5)$$

すなわち式(C-4)は電界ベクトルの”振幅”とみなすことができる。  
磁界Hについても同様である。

## 付録D 特定方向の電磁界成分の時間平均

方向(D-1)の電界は式(D-2)となる。

$$\hat{e} = (e_x, e_y, e_z) \quad (|\hat{e}|=1) \quad (D-1)$$

$$\begin{aligned} \hat{e} \cdot \mathbf{E}(t) &= e_x \operatorname{Re}(E_x e^{j\omega t}) + e_y \operatorname{Re}(E_y e^{j\omega t}) + e_z \operatorname{Re}(E_z e^{j\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e_x (E_x e^{j\omega t} + \bar{E}_x e^{-j\omega t}) + e_y (E_y e^{j\omega t} + \bar{E}_y e^{-j\omega t}) + e_z (E_z e^{j\omega t} + \bar{E}_z e^{-j\omega t}) \right\} \end{aligned} \quad (D-2)$$

式(D-2)の2乗は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{e} \cdot \mathbf{E}(t) \rangle^2 &= \frac{1}{4} e_x^2 \left( E_x^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_x^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_x|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} e_y^2 \left( E_y^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_y^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_y|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} e_z^2 \left( E_z^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_z^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_z|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e_x e_y \left( E_x \bar{E}_y + \bar{E}_x E_y + E_x E_y e^{2j\omega t} + \bar{E}_x \bar{E}_y e^{-2j\omega t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e_y e_z \left( E_y \bar{E}_z + \bar{E}_y E_z + E_y E_z e^{2j\omega t} + \bar{E}_y \bar{E}_z e^{-2j\omega t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e_z e_x \left( E_z \bar{E}_x + \bar{E}_z E_x + E_z E_x e^{2j\omega t} + \bar{E}_z \bar{E}_x e^{-2j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (D-3)$$

式(D-3)の時間平均は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{e} \cdot \mathbf{E}(t) \rangle^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( e_x^2 |E_x|^2 + e_y^2 |E_y|^2 + e_z^2 |E_z|^2 \right) \\ &\quad + \left\{ e_x e_y \operatorname{Re}(E_x \bar{E}_y) + e_y e_z \operatorname{Re}(E_y \bar{E}_z) + e_z e_x \operatorname{Re}(E_z \bar{E}_x) \right\} \end{aligned} \quad (D-4)$$

磁界Hについても同様である。