

**EEM-FDM**

**理論説明書**

**株式会社 EEM**

## 目次

1	概要	3
2	基本式の定式化	5
2.1	Maxwell 方程式	5
2.2	Yee 格子	6
3	時間領域差分法	8
3.1	方程式の離散化	8
3.2	Mur1 次吸収境界条件	11
3.3	PML 吸収境界条件	11
3.4	周期境界条件	15
3.5	平面波入射	15
3.6	ビーム入射	16
3.7	電圧給電	17
3.8	安定性条件	17
3.9	収束判定条件	18
3.10	周波数特性	18
3.11	分散性媒質	19
4	周波数領域差分法	24
4.1	EH 法の離散化	24
4.2	EH 法の吸収境界条件	26
4.3	E 法の離散化	27
4.4	E 法の吸収境界条件	29
4.5	周期境界条件	30
4.6	Dirichlet 条件	30
4.7	平面波入射	31
4.8	電圧給電	31
4.9	共役勾配法	31
5	集中回路定数	33
5.1	抵抗	33
5.2	キャパシタ	33
5.3	インダクタ	33
5.4	非線形回路素子	34
6	近傍界	36
6.1	磁界	36
6.2	電流	36
6.3	電力損失	36
6.4	電圧	36
7	遠方界	38
8	アンテナ特性	41
8.1	入力インピーダンス	41
8.2	利得	41
8.3	結合度	41
9	散乱特性	43
10	伝送線路特性	44
	参考文献	45
付録A	正弦波のときのフーリエ変換	46
付録B	遠方界の軸比	46
付録C	遠方界成分の関係	46
付録D	電磁界ベクトルの時間平均	47
付録E	特定方向の電磁界成分の時間平均	47

## 1 概要

本ソフトウェアはMaxwell 方程式を時間領域差分法(FDTD法) [1]-[4]または周波数領域差分法(注1)によって数値的に解き、電磁界特性を求めるものである。

時間領域差分法はMaxwell 方程式において時間微分をそのまま離散化して時間的に逐次計算する方法である。計算された時間波形を指定した周波数でフーリエ変換し周波数特性を求める。

周波数領域差分法は周波数を指定してMaxwell 方程式の時間微分を  $j\omega$  で置き換え、空間微分を離散化して連立一次方程式に変換してこれを解く方法である。連立一次方程式は対称疎行列になり、これを反復解法である共役勾配法で解く。基本式を電界と磁界で表現するEH法と、電界だけで表現するE法がある。

以上の方法で得られた周波数領域の電界分布から近傍界の磁界・電流分布、遠方界その他の電磁界特性を計算することができる。

(注1)

周波数領域差分法は正確には周波数を固定した調和界を空間領域の差分法で解析するものであるが、ここではこれを周波数領域差分法と呼ぶ。

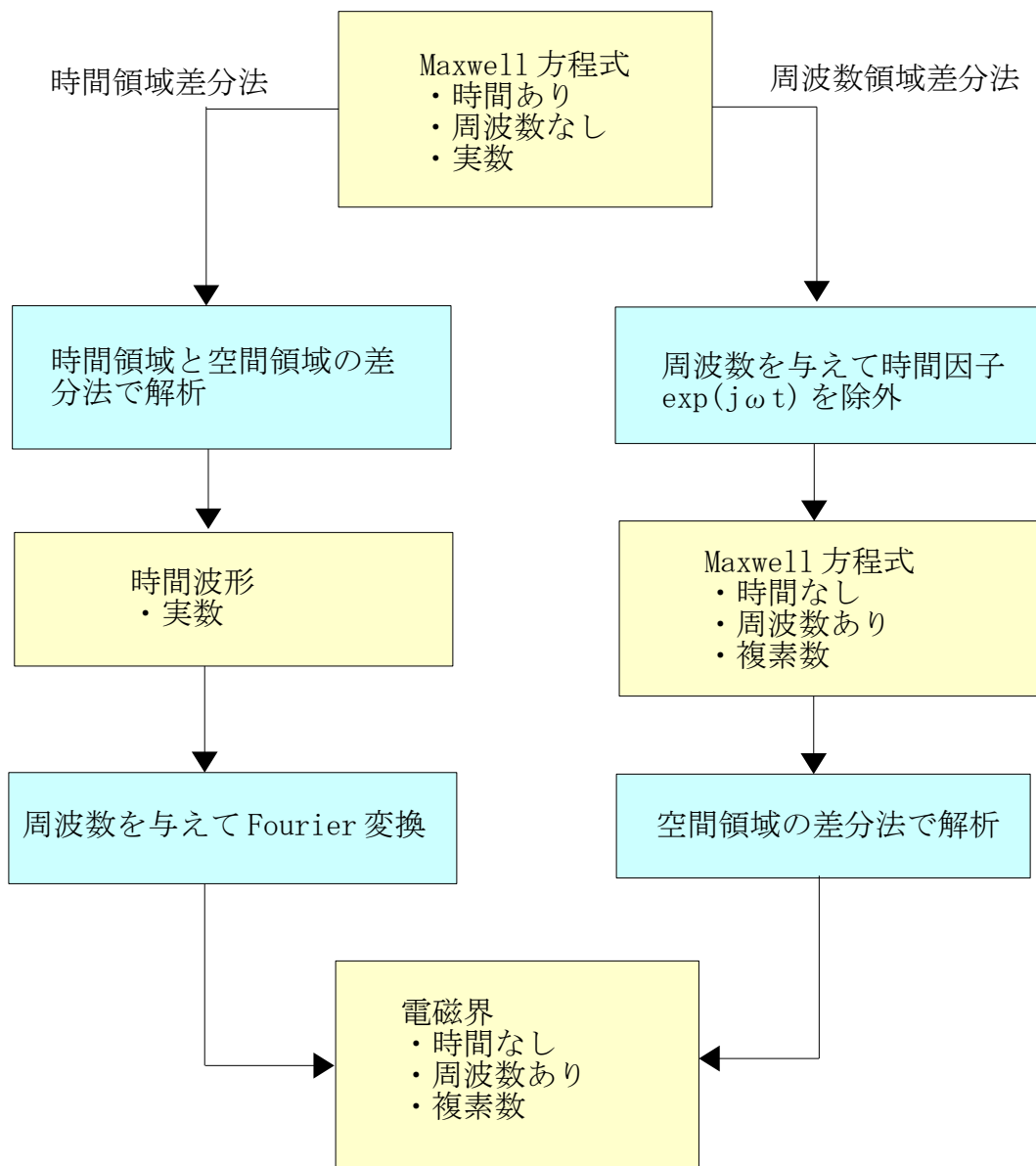


図 1.1 計算の流れ

## 2 基本式の定式化

### 2.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式、構成方程式、オームの法則は以下ようになる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{H} \quad (2.6)$$

ここで、 $\epsilon_0, \mu_0$  は真空の誘電率と透磁率、 $\epsilon_r, \mu_r$  は比誘電率と比透磁率、 $\sigma, \sigma^*$  は導電率と導磁率である。

式(2.3)-(2.6)を式(2.1)(2.2)に代入すると次式が得られる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma^* \mathbf{H} \quad (2.8)$$

外部から平面波が入射するときは次式のように全電磁界を入射電磁界  $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  (既知)と散乱電磁界  $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$  に分解する。[2][3]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \quad (2.10)$$

式(2.7)(2.8)を入射電磁界に適用すると次式が得られる。

$$\nabla \times \mathbf{H}^i = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^i = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} \quad (2.12)$$

式(2.9)(2.10)を式(2.7)(2.8)に代入した式から式(2.11)(2.12)を引くと次式が得られる。

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} - \sigma \mathbf{E}^s = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}^i \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} + \sigma^* \mathbf{H}^s = -\mu_0 (\mu_r - 1) \frac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} - \sigma^* \mathbf{H}^i \quad (2.14)$$

式(2.13)(2.14)の左辺は未知数  $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$  から成り、右辺は既知数  $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  から成る。

ここで、真空の波動インピーダンスと光速度

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120 \pi \quad (2.15)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.16)$$

を用いると式(2.13) (2.14)は以下ようになる。

$$\nabla \times Z \mathbf{H}^s - \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}^s}{c \partial t} - Z \sigma \mathbf{E}^s = (\epsilon_r - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} + Z \sigma \mathbf{E}^i \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mu_r \frac{\partial Z \mathbf{H}^s}{c \partial t} + \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^s = -(\mu_r - 1) \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{c \partial t} - \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^i \quad (2.18)$$

式(2.17) (2.18)の両辺の次元は[V/m<sup>2</sup>]であり、対応する項の係数の次元が一致しており計算上便利である。

完全導体の内部では

$$\mathbf{E}^s = -\mathbf{E}^i \quad (2.19)$$

$$\mathbf{H}^s = -\mathbf{H}^i \quad (2.20)$$

となる。

波源が計算領域内にあるとき(電圧給電の場合)は式(2.17) (2.18)において給電点以外では

$\mathbf{E}^i = \mathbf{H}^i = 0$  すなわち右辺=0となり、給電点では  $\mathbf{E}^s$  に給電電界(既知数)を強制的に与える。

以上の取り扱いによって、波源が外部にある平面波入射と波源が内部にある電圧給電を同じ式で解くことができる。

## 2.2 Yee 格子

空間領域で差分化するときの電界と磁界の計算点は図 2.1 の Yee 格子にとる。

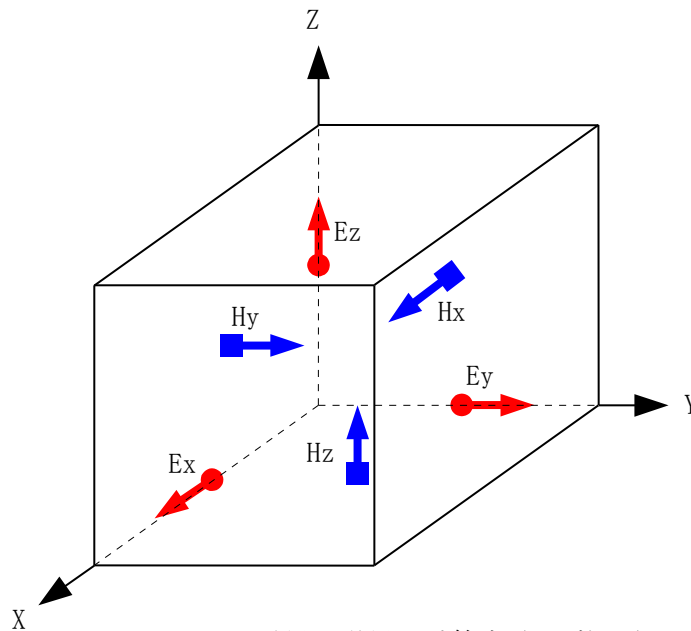


図 2.1 電界・磁界の計算点 (Yee 格子)

空間を3次元XYZ座標とし、各方向を不均一メッシュ

$x_i (i=0, \dots, N_x), y_j (j=0, \dots, N_y), z_k (k=0, \dots, N_z)$  で分割する。メッシュ間隔について次式を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i & (i=0, \dots, N_x-1) \\ \Delta y_{j+\frac{1}{2}} &= y_{j+1} - y_j & (j=0, \dots, N_y-1) \\ \Delta z_{k+\frac{1}{2}} &= z_{k+1} - z_k & (k=0, \dots, N_z-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} & (i=1, \dots, N_x-1) \\ \Delta y_j &= y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} & (j=1, \dots, N_y-1) \\ \Delta z_k &= z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}} & (k=1, \dots, N_z-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

電界の各成分を

$$\left. \begin{aligned} E_x \left( i+\frac{1}{2}, j, k \right) & \quad (i=0, \dots, N_x-1, j=0, \dots, N_y, k=0, \dots, N_z) \\ E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) & \quad (j=0, \dots, N_y-1, k=0, \dots, N_z, i=0, \dots, N_x) \\ E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) & \quad (k=0, \dots, N_z-1, i=0, \dots, N_x, j=0, \dots, N_y) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

磁界の各成分を

$$\left. \begin{aligned} H_x \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) & \quad (i=0, \dots, N_x, j=-1, \dots, N_y, k=-1, \dots, N_z) \\ H_y \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) & \quad (j=0, \dots, N_y, k=-1, \dots, N_z, i=-1, \dots, N_x) \\ H_z \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) & \quad (k=0, \dots, N_z, i=-1, \dots, N_x, j=-1, \dots, N_y) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

と書く。このようにijkについて巡回的に記述すると計算式とプログラムが規則的に記述できて便利である。電界については第1インデックスが半整数、その他が整数になり、磁界については第1インデックスが整数、その他が半整数になる。

式(2.24)のように磁界の接線成分を境界外に一つ余分にとると、いくつかの点で計算式とプログラムが簡単になる。

電界要素と磁界要素の総数はそれぞれ

$$N_E = N_x(N_y+1)(N_z+1) + N_y(N_z+1)(N_x+1) + N_z(N_x+1)(N_y+1) \quad (2.25)$$

$$N_H = (N_x+1)(N_y+2)(N_z+2) + (N_y+1)(N_z+2)(N_x+2) + (N_z+1)(N_x+2)(N_y+2) \quad (2.26)$$

である。右辺の3つの項がX, Y, Z成分に対応する。

### 3 時間領域差分法

#### 3.1 方程式の離散化

時間領域差分法 (FDTD 法) では式 (2.17) (2.18) を時間領域と空間領域で差分化する。  
式 (2.17) (2.18) で時間微分を左辺を持ってくると次式になる。

$$\epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}^s}{c \partial t} = \nabla \times Z \mathbf{H}^s - Z \sigma \mathbf{E}^s - (\epsilon_r - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} - Z \sigma \mathbf{E}^i \quad (3.1)$$

$$\mu_r \frac{\partial Z \mathbf{H}^s}{c \partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}^s - \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^s - (\mu_r - 1) \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{c \partial t} - \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^i \quad (3.2)$$

式 (3.1) を時刻  $n+1/2$  で離散化する。

$$\epsilon_r \frac{\mathbf{E}^{s,n+1} - \mathbf{E}^{s,n}}{c \Delta t} = \nabla \times Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - Z \sigma \mathbf{E}^{s,n+1} - (\epsilon_r - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} \Big|_{(n+1)\Delta t} - Z \sigma \mathbf{E}^{i,n+1} \quad (3.3)$$

これを解くと次式が得られる。

$$\mathbf{E}^{s,n+1} = c_1 \mathbf{E}^{s,n} + c_2 (c \Delta t) \nabla \times Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - c_3 \Delta t \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} \Big|_{(n+1)\Delta t} - c_4 \mathbf{E}^{i,n+1} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + Z \sigma c \Delta t} \\ c_2 &= \frac{1}{\epsilon_r + Z \sigma c \Delta t} \\ c_3 &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + Z \sigma c \Delta t} \\ c_4 &= \frac{Z \sigma c \Delta t}{\epsilon_r + Z \sigma c \Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここで  $c_1, \dots, c_4$  は無次元の数である。

同様に式 (3.2) を時刻  $n$  で離散化する。

$$\mu_r \frac{Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - Z \mathbf{H}^{s,n-\frac{1}{2}}}{c \Delta t} = -\nabla \times \mathbf{E}^{s,n} - \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - (\mu_r - 1) \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{c \partial t} \Big|_{(n+\frac{1}{2})\Delta t} - \frac{\sigma^*}{Z} Z \mathbf{H}^{i,n+\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

これを解くと次式が得られる。

$$Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} = d_1 Z \mathbf{H}^{s,n-\frac{1}{2}} - d_2 (c \Delta t) \nabla \times \mathbf{E}^{s,n} - d_3 \Delta t \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{\partial t} \Big|_{(n+\frac{1}{2})\Delta t} - d_4 Z \mathbf{H}^{i,n+\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$



$$\left. \begin{aligned}
d_1 &= \frac{\mu_r}{\mu_r + \frac{\sigma^*}{Z} c \Delta t} \\
d_2 &= \frac{1}{\mu_r + \frac{\sigma^*}{Z} c \Delta t} \\
d_3 &= \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + \frac{\sigma^*}{Z} c \Delta t} \\
d_4 &= \frac{\frac{\sigma^*}{Z} c \Delta t}{\mu_r + \frac{\sigma^*}{Z} c \Delta t}
\end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ここで  $d_1, \dots, d_4$  は無次元の数である。

式(3.3) (3.6)の右辺第2項以下を上記のように最新時刻にとる方法[2] (完全陰解法) 以外に、2つの時刻の平均をとる方法[3][4] (半陰解法、Crank-Nicolson法) があるが、後者では導電率が大きいときに正しい解にならないのでここでは使用しない。

式(3.4) (3.7)のXYZ成分を離散化すると次式が得られる。

以下、離散式では  $E^s, H^s$  を単に  $E, H$  と表す。

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= c_1\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \\
&+ c_2\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \left\{ \frac{ZH_z^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - ZH_z^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j/(c \Delta t)} - \frac{ZH_y^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) - ZH_y^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right)}{\Delta z_k/(c \Delta t)} \right\} \\
&- c_3\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \Delta t \frac{\partial E_x^{i, n+1}}{\partial t}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \\
&- c_4\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) E_x^{i, n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \quad (i=0, \dots, N_x-1, j=0, \dots, N_y, k=0, \dots, N_z)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) &= c_1\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \\
&+ c_2\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \left\{ \frac{ZH_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - ZH_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z_k/(c \Delta t)} - \frac{ZH_z^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - ZH_z^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x_i/(c \Delta t)} \right\} \\
&- c_3\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \Delta t \frac{\partial E_y^{i, n+1}}{\partial t}\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \\
&- c_4\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) E_y^{i, n+1}\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \quad (j=0, \dots, N_y-1, k=0, \dots, N_z, i=0, \dots, N_x)
\end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) &= c_1\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \\
&+ c_2\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \left\{ \frac{ZH_y^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) - ZH_y^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x_i/(c\Delta t)} - \frac{ZH_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - ZH_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j/(c\Delta t)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&- c_3\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Delta t \frac{\partial E_z^{i, n+1}}{\partial t}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \\
&- c_4\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) E_z^{i, n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \quad (k=0, \dots, N_z-1, i=0, \dots, N_x, j=0, \dots, N_y) \\
ZH_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) &= d_1\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) ZH_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_2\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{E_z^n\left(k-\frac{1}{2}, i, j\right) - E_z^n\left(k-\frac{1}{2}, i, j-1\right)}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} - \frac{E_y^n\left(j-\frac{1}{2}, k, i\right) - E_y^n\left(j-\frac{1}{2}, k-1, i\right)}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&- d_3\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{\partial ZH_x^{i, n+\frac{1}{2}}}{\partial t}\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_4\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) ZH_x^{i, n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \quad (i=0, \dots, N_x, j=1, \dots, N_y, k=1, \dots, N_z) \\
ZH_y^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) &= d_1\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) ZH_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_2\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{E_x^n\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^n\left(i-\frac{1}{2}, j, k-1\right)}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} - \frac{E_z^n\left(k-\frac{1}{2}, i, j\right) - E_z^n\left(k-\frac{1}{2}, i-1, j\right)}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
&- d_3\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{\partial ZH_y^{j, n+\frac{1}{2}}}{\partial t}\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_4\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) ZH_y^{j, n+\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \quad (j=0, \dots, N_y, k=1, \dots, N_z, i=1, \dots, N_x) \\
ZH_z^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) &= d_1\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) ZH_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_2\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{E_y^n\left(j-\frac{1}{2}, k, i\right) - E_y^n\left(j-\frac{1}{2}, k, i-1\right)}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} - \frac{E_x^n\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^n\left(i-\frac{1}{2}, j-1, k\right)}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}/(c\Delta t)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
&- d_3\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{\partial ZH_z^{k, n+\frac{1}{2}}}{\partial t}\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \\
&- d_4\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) ZH_z^{k, n+\frac{1}{2}}\left(k, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \quad (k=0, \dots, N_z, i=1, \dots, N_x, j=1, \dots, N_y)
\end{aligned}$$

式(3.5)(3.8)は真空中  $\epsilon_r = \mu_r = 1, \sigma = \sigma^* = 0$  では次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1 \\ c_3 = c_4 = d_3 = d_4 = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.15}$$

また、完全導体中では電界と磁界は式(2.19)(2.20)により計算される。

これは式(3.5)(3.8)で  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\sigma^* \rightarrow \infty$  とした式

$$\left. \begin{aligned} c_1=c_2=c_3=d_1=d_2=d_3=0 \\ c_4=d_4=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

と一致する。(完全陰解法のため)

### 3.2 Mur1 次吸収境界条件

Mur の 1 次吸収境界条件は以下のようにして導かれる。[5]

-X 境界面で-X 方向に進む波の Y 成分の波動方程式 (one way wave equation) は以下のようになる。

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \quad \left( v \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \right) \quad (3.17)$$

ここで、 $\epsilon_r, \mu_r$  は境界の媒質の比誘電率と比透磁率である。

式(3.17)のそれぞれの項を  $t=n\Delta t, i=0$  で離散化すると

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_y}{\partial x} \right|_{j,k+\frac{1}{2},i=0}^n &= \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ H_y^n \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - H_y^n \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x_0} \left\{ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{2} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_y}{\partial t} \right|_{j,k+\frac{1}{2},i=0}^n &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, 0 \right) - H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, 0 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{2} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

となり、式(3.18)(3.19)を式(3.17)に代入すると次式を得る。

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \frac{v\Delta t - \Delta x_0}{v\Delta t + \Delta x_0} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\} \quad (3.20)$$

式(3.20)の計算では右辺第一項を別途保存することが必要である。

その他の成分と境界面についても同様である。

Murの吸収境界条件が精度よく機能するには、対象物体と境界がある程度以上離れていることが必要である。

### 3.3 PML 吸収境界条件

PML[6](Berenger's Perfectly Matched Layer)では解析領域の外に余分のメッシュをとり、その中でMaxwell方程式を少し変更した方程式をYeeスキームにより計算する。

方程式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} &= + \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \epsilon \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} &= - \frac{\partial H_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} &= + \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \epsilon \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} &= - \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} &= + \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} &= - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} &= - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} &= + \frac{\partial E_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} &= - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} &= + \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} &= - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= + \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

ここで、電磁界の各成分は次式のように2つに分解される。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{xy} + E_{xz} \\ E_y &= E_{yz} + E_{yx} \\ E_z &= E_{zx} + E_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_{xy} + H_{xz} \\ H_y &= H_{yz} + H_{yx} \\ H_z &= H_{zx} + H_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

吸収境界条件(インピーダンス整合条件)は異方性を持った導電率と導磁率に関する以下の式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\epsilon} &= \frac{\sigma_x^*}{\mu} \\ \frac{\sigma_y}{\epsilon} &= \frac{\sigma_y^*}{\mu} \\ \frac{\sigma_z}{\epsilon} &= \frac{\sigma_z^*}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

式(3.21)と(3.24)をYeeスキームにより離散化すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& \epsilon \frac{E_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)-E_{xy}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} + \sigma_y(j) E_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = + \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j} \\
& \epsilon \frac{E_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)-E_{xz}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} + \sigma_z(k) E_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right)}{\Delta z_k} \\
& \mu \frac{H_{xy}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)-H_{xy}^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} + \sigma_y^*\left(j+\frac{1}{2}\right) H_{xy}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) = - \frac{E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j+1\right)-E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right)}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \\
& \mu \frac{H_{xz}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)-H_{xz}^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} + \sigma_z^*\left(k+\frac{1}{2}\right) H_{xz}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) = + \frac{E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k+1, i\right)-E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right)}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

これを変形し、その他の成分もXYZについて巡回させて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
E_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_y(j)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{xy}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta y_j} \left\{ ZH_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - ZH_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \right\} \right] \\
E_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_z(k)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{xz}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta z_k} \left\{ ZH_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) - ZH_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) \right\} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{aligned}
E_{yz}^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_z(k)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{yz}^{n-1}\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) + \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta z_k} \left\{ ZH_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - ZH_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) \right\} \right] \\
E_{yx}^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_x(i)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{yx}^{n-1}\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) - \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta x_i} \left\{ ZH_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - ZH_z^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right\} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned}
E_{zx}^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_x(i)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{zx}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) + \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta x_i} \left\{ ZH_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) - ZH_y^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) \right\} \right] \\
E_{zy}^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_y(j)}{\epsilon} \Delta t} \left[ E_{zy}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) - \frac{c \Delta t}{\epsilon_r \Delta y_j} \left\{ ZH_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - ZH_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) \right\} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned}
ZH_{xy}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_y^*\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\mu} \Delta t} \left[ ZH_{xy}^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j+1\right) - E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \right\} \right] \\
ZH_{xz}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_z^*\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\mu} \Delta t} \left[ ZH_{xz}^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) + \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \left\{ E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k+1, i\right) - E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \right\} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned}
ZH_{yz}^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_z^*\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\mu} \Delta t} \left[ ZH_{yz}^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) - \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \left\{ E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] \\
ZH_{yx}^{n+\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_x^*\left(i+\frac{1}{2}\right)}{\mu} \Delta t} \left[ ZH_{yx}^{n-\frac{1}{2}}\left(j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}\right) + \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i+1, j\right) - E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \right\} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{aligned} ZH_{zx}^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{\sigma_x^*\left(i+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{\mu}{\mu_r}} \Delta t} \left[ ZH_{zx}^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i+1\right) - E_y^n\left(j+\frac{1}{2}, k, i\right) \right\} \right] \\ ZH_{zy}^{n+\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{\sigma_y^*\left(j+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{\mu}{\mu_r}} \Delta t} \left[ ZH_{zy}^{n-\frac{1}{2}}\left(k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{c \Delta t}{\mu_r \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

式(3.30)-(3.35)の右辺の  $\epsilon, \mu, \epsilon_r (\equiv \epsilon/\epsilon_0), \mu_r (\equiv \mu/\mu_0)$  は本来の解析領域の境界での値を使用する。これによって境界にある媒質がその外に無限に続く境界条件を表すことができる。導電率  $\sigma$  は外に行くほど大きくなるように例えば次式の関数形をとる。(L:PMLのセル数、M:正の整数)

$$\sigma_x(x) = \begin{cases} \sigma_{max} \left( \frac{x_0 - x}{L \Delta x} \right)^M & (x_0 - L \Delta x < x < x_0) \\ 0 & (x_0 \leq x \leq x_{Nx}) \\ \sigma_{max} \left( \frac{x - x_{Nx}}{L \Delta x} \right)^M & (x_{Nx} < x < x_{Nx} + L \Delta x) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\sigma_y(y) = \begin{cases} \sigma_{max} \left( \frac{y_0 - y}{L \Delta y} \right)^M & (y_0 - L \Delta y < y < y_0) \\ 0 & (y_0 \leq y \leq y_{Ny}) \\ \sigma_{max} \left( \frac{y - y_{Ny}}{L \Delta y} \right)^M & (y_{Ny} < y < y_{Ny} + L \Delta y) \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\sigma_z(z) = \begin{cases} \sigma_{max} \left( \frac{z_0 - z}{L \Delta z} \right)^M & (z_0 - L \Delta z < z < z_0) \\ 0 & (z_0 \leq z \leq z_{Nz}) \\ \sigma_{max} \left( \frac{z - z_{Nz}}{L \Delta z} \right)^M & (z_{Nz} < z < z_{Nz} + L \Delta z) \end{cases} \quad (3.38)$$

PML 領域内でのメッシュサイズは本来の解析領域の境界でのメッシュサイズに一致する均一メッシュにする。

PML の反射係数は入射角を  $\phi$  とすると次式で与えられる。(  $v \equiv c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  ) [4]

$$R(\phi) = -\exp\left(-2j \frac{\omega}{v} \Delta x \cos \phi\right) \exp\left\{-\frac{2 \cos \phi}{\epsilon v} \int_{x_0 - L \Delta x}^{x_0} \sigma_x(x) dx\right\} \quad (3.39)$$

これに式(3.36)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} |R(\phi)| &= \exp\left\{-\frac{2 \sigma_{max} L \Delta}{(M+1) \epsilon v} \cos \phi\right\} \\ &= \left[ \exp\left\{-\frac{2 \sigma_{max} L \Delta}{(M+1) \epsilon v}\right\} \right]^{\cos \phi} \\ &= |R(0)|^{\cos \phi} \quad (\Delta = \Delta x, \Delta y, \Delta z) \end{aligned} \quad (3.40)$$

式(3.40)から垂直入射のときの反射係数  $|R(0)|$  を与えると  $\sigma_{max}$  は次式で計算される。

$$\sigma_{max} = -\frac{(M+1) \epsilon v}{2 L \Delta} \ln |R(0)| \quad (3.41)$$

式(3.30)第一式の-Y方向のときの右辺の分母は、式(3.37)(3.41)を用いて、

$$1 + \frac{\sigma_y(j)}{\epsilon} \Delta t = 1 + K \left( \frac{v \Delta t}{\Delta y} \right) \left( \frac{|j+1/2|}{L} \right)^M \quad (-L+1 \leq j \leq -1) \quad (3.42)$$

$$K \equiv \frac{M+1}{2L} \ln \left( \frac{1}{|R(0)|} \right) \quad (3.43)$$

となる。ここでKはPMLのパラメータで決まる無次元の正の定数である。式(3.42)からわかるようにPMLのパラメータは関数の形を決めるだけであるから0から単調に増加する関数なら(係数Kも含め)何でもよい。

次に、式(3.33)第一式の-Y方向のときの右辺の分母は、式(3.29)を用いて

$$1 + \frac{\sigma_y^* \left( j + \frac{1}{2} \right)}{\mu} \Delta t = 1 + K \left( \frac{v \Delta t}{\Delta y} \right) \left( \frac{|j+1|}{L} \right)^M \quad (-L \leq j \leq -1) \quad (3.44)$$

となる。

式(3.42)(3.44)でjについて1/2加算した理由は、PML本来の領域(j=-1/2から始まる)の導電率を0から始め計算の発散を防ぐためである。

PMLの具体的な計算手順は、本来の解析領域内の電界を境界も含めて3.1の方法で計算した後、PMLの正味領域内の電界と磁界を本節の方法で計算する。PML領域の外側の境界では電界は0とする。

### 3.4 周期境界条件

ある方向に電磁界が周期的になる境界条件を周期境界条件と呼ぶ。

境界での電界の接線成分を式(3.9)-(3.11)で計算する際、境界の半セル外側の磁界の接線成分に反対側の境界の半セル内側の磁界の接線成分を使用する。

### 3.5 平面波入射

平面波入射のときの入射電磁界は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} F \left( t + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{r}}^i}{c} \right) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{r}}^i \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} = -\hat{\theta}^i & (\text{垂直偏波}) \\ \hat{\mathbf{h}} = +\hat{\phi}^i & (\text{水平偏波}) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathbf{r}}^i = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta^i \cos \phi^i + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta^i \sin \phi^i + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta^i \quad (3.48)$$

$$\hat{\theta}^i = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta^i \cos \phi^i + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta^i \sin \phi^i - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta^i \quad (3.49)$$

$$\hat{\phi}^i = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi^i + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi^i \quad (3.50)$$

ここで  $\mathbf{r}_0$  は解析領域の中心、 $\hat{\mathbf{e}}$  は入射電界ベクトル、 $\theta^i, \phi^i$  は原点から入射方向を見た角度である。伝搬方向の単位ベクトルは  $-\hat{\mathbf{r}}^i$  であることに注意。

またFは時間波形で、パルス・正弦波に対して次式で与えられる。

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{vt-R_0}{w}\right)^2\right] & (\text{パルス}) \\ \cos \omega t & (\text{正弦波}) \end{cases} \quad (3.51)$$

ここで  $R_0$  は初期状態 ( $t=0$ ) でのパルス中心と解析領域の中心の距離であり、初期状態でパルスの裾が解析領域にかからないように十分大きくとる。 $w$  はパルス幅であり、中心周波数の波長を  $\lambda$  とするとおおよそ次式が適当である。

$$w \approx \frac{\lambda}{2} \quad (3.52)$$

### 3.6 ビーム入射

平面波の振幅が軸を中心にガウス分布するビーム入射では入射電磁界は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0^i(\mathbf{r}, t) K(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0^i(\mathbf{r}, t) K(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$K(\mathbf{r}) = \exp\left\{-\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\theta}^i}{w_\theta/2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\phi}^i}{w_\phi/2}\right)^2\right\} \quad (3.54)$$

ここで、 $\mathbf{E}_0^i(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{H}_0^i(\mathbf{r}, t)$  は無限に広がる平面波、 $w_\theta, w_\phi$  は  $\theta, \phi$  方向で電界が最大値の  $1/e$  になるビーム幅である。また、ビームの中心は原点を通るものとする。  
式(2.11) (2.12)に相当する式には以下のように第2項の補正項が加わる。

$$\nabla \times Z \mathbf{H}^i = K \nabla \times Z \mathbf{H}_0^i + \nabla K \times Z \mathbf{H}_0^i = \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} + \nabla K \times Z \mathbf{H}_0^i \quad (3.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^i = K \nabla \times \mathbf{E}_0^i + \nabla K \times \mathbf{E}_0^i = -\frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{c \partial t} + \nabla K \times \mathbf{E}_0^i \quad (3.56)$$

以下この補正項の計算式を求める。

式(3.46)相当から

$$\begin{aligned} Z \mathbf{H}_{0,\theta}^i &= \mathbf{E}_{0,\phi}^i \\ Z \mathbf{H}_{0,\phi}^i &= -\mathbf{E}_{0,\theta}^i \end{aligned} \quad (3.57)$$

となり、これから

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^i \times Z \mathbf{H}_0^i &= Z \mathbf{H}_{0,\phi}^i \hat{r}^i = -\mathbf{E}_{0,\theta}^i \hat{r}^i \\ \hat{\phi}^i \times Z \mathbf{H}_0^i &= -Z \mathbf{H}_{0,\theta}^i \hat{r}^i = -\mathbf{E}_{0,\phi}^i \hat{r}^i \\ \hat{\theta}^i \times \mathbf{E}_0^i &= \mathbf{E}_{0,\phi}^i \hat{r}^i = Z \mathbf{H}_{0,\theta}^i \hat{r}^i \\ \hat{\phi}^i \times \mathbf{E}_0^i &= -\mathbf{E}_{0,\theta}^i \hat{r}^i = Z \mathbf{H}_{0,\phi}^i \hat{r}^i \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる。これを用いると補正項は以下ようになる。

$$\nabla K \times Z \mathbf{H}_0^i = 2K \left\{ \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\theta}^i}{(w_\theta/2)^2} \mathbf{E}_{0,\theta}^i + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\phi}^i}{(w_\phi/2)^2} \mathbf{E}_{0,\phi}^i \right\} \hat{r}^i \quad (3.59)$$

$$\nabla K \times \mathbf{E}_0^i = -2K \left\{ \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\theta}^i}{(w_\theta/2)^2} Z \mathbf{H}_{0,\theta}^i + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\phi}^i}{(w_\phi/2)^2} Z \mathbf{H}_{0,\phi}^i \right\} \hat{r}^i \quad (3.60)$$

これから補正項は進行方向成分すなわち縦波成分であることがわかる。



式(3.4)(3.7)は以下のように変更になる。

$$\mathbf{E}^{s,n+1} = c_1 \mathbf{E}^{s,n} + c_2 (c \Delta t) \nabla \times Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - c_3 \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} \right|_{(n+1)\Delta t} - c_4 \mathbf{E}^{i,n+1} + c_5 E^i \hat{\mathbf{r}}^i \quad (3.61)$$

$$Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} = d_1 Z \mathbf{H}^{s,n-\frac{1}{2}} - d_2 (c \Delta t) \nabla \times \mathbf{E}^{s,n} - d_3 \Delta t \left. \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{\partial t} \right|_{(n+\frac{1}{2})\Delta t} - d_4 Z \mathbf{H}^{i,n+\frac{1}{2}} + d_5 Z H^i \hat{\mathbf{r}}^i \quad (3.62)$$

ここで  $c_1, c_4, d_1, d_4$  は式(3.5)(3.8)と同じであり、 $c_5, d_5$  は以下のようになる。

$$c_5 = c_2 K_{[v,h]}^E \quad (3.63)$$

$$d_5 = d_2 K_{[v,h]}^H \quad (3.64)$$

$$-K_v^E = K_h^H = \frac{2(\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}^i)(c \Delta t)}{(w_\theta/2)^2} \quad (3.65)$$

$$K_h^E = K_v^H = \frac{2(\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}^i)(c \Delta t)}{(w_\phi/2)^2} \quad (3.66)$$

ここで右下の(v, h)はそれぞれ垂直・水平偏波を表す。式(3.65)の負号は式(3.47)第一式の負号に対応している。

なお、ビーム幅が波長の数倍以上あれば縦波成分が小さくなり、ほぼ平面波(TEM波)とみなすことができる。

### 3.7 電圧給電

電圧給電のときは給電点で

$$E_z^i(\mathbf{r}, t) = \frac{V^i}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} F(t) \quad (3.67)$$

となる(Z方向の場合)。ここでF(t)は時間波形である。

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{t-t_D-p}{p/4}\right)^2\right\} & \text{(ガウスパルス)} \\ \sqrt{2}e\left(\frac{t-t_D-p}{p/4}\right)\exp\left\{-\left(\frac{t-t_D-p}{p/4}\right)^2\right\} & \text{(微分ガウスパルス)} \\ \cos(\omega t + \phi) & \text{(正弦波)} \end{cases} \quad (3.68)$$

式(3.68)は最大値が1になるように正規化されている。

式(3.68)の第一式、第二式では初期状態( $t=0$ )で給電電圧が十分小さくなるようにとっている。またパラメータ  $p$  は中心周波数を  $f$  とするとおおよそ次式が適当である。

$$p \approx \frac{1}{f} \quad (3.69)$$

式(3.68)の第一式、第二式の  $t_D$  は時間遅れ、第三式の  $\phi$  は給電電圧の位相であり、複数の給電点を与えるときに使用する。

### 3.8 安定性条件

反復計算が発散せずに安定に行われるためには、時間幅について以下のCourant条件が必要である。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\min_i \Delta x_i^2} + \frac{1}{\min_j \Delta y_j^2} + \frac{1}{\min_k \Delta z_k^2}}} \quad (3.70)$$

正弦波入射のときはさらに  $\Delta t$  は周期の整数分の1とする。

### 3.9 収束判定条件

解析領域内の平均電磁界を次式で定義する。

$$\bar{E}^n = \frac{1}{N_x N_y N_z} \left\{ \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \left| E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \right| + \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} \left| E_y^n \left( j + \frac{1}{2}, k, i \right) \right| + \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \left| E_z^n \left( k + \frac{1}{2}, i, j \right) \right| \right\} \quad (3.71)$$

$$\bar{H}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{N_x N_y N_z} \left\{ \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \left| H_x^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right| + \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} \left| H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right| + \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \left| H_z^{n+\frac{1}{2}} \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \right| \right\} \quad (3.72)$$

ここで $\Sigma'$ は両端で因子1/2をかけることを意味する(台形則)。

パルスときは平均電界が十分小さくなったとき収束したとみなす。

$$\frac{\bar{E}^n}{\bar{E}_{max}} < \epsilon, \quad \frac{\bar{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\bar{H}_{max}} < \epsilon \quad (3.73)$$

正弦波のときは1周期前との相対誤差の1周期の平均が十分小さくなったとき収束したとみなす。

$$\frac{1}{N_T} \sum_{i=0}^{N_T-1} \Delta \bar{E}^{n-i} < \epsilon, \quad \frac{1}{N_T} \sum_{i=0}^{N_T-1} \Delta \bar{H}^{n+\frac{1}{2}-i} < \epsilon \quad \left( N_T \equiv \frac{T}{\Delta t}, \quad T \equiv \frac{1}{f} \right) \quad (3.74)$$

$$\Delta \bar{E}^n \equiv \left| \frac{\bar{E}^n - \bar{E}^{n-N_T}}{\bar{E}^n} \right| \quad (3.75)$$

$$\Delta \bar{H}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \left| \frac{\bar{H}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{H}^{n+\frac{1}{2}-N_T}}{\bar{H}^{n+\frac{1}{2}}} \right| \quad (3.76)$$

### 3.10 周波数特性

以上の方法で計算された時間領域の電界をフーリエ変換することによって周波数特性が得られる。

入射波で正規化された電界は次式で計算される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} \frac{\int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt}{\int_0^\infty E^i(\mathbf{r}_0, t) e^{-j\omega t} dt} & (\text{パルス}) \\ \frac{\int_{t_c}^{t_c+T} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt}{\int_{t_c}^{t_c+T} E^i(\mathbf{r}_0, t) e^{-j\omega t} dt} & (\text{正弦波}) \end{cases} \quad (3.77)$$

ここで、 $\mathbf{r}_0$ は平面波入射では解析領域の中心、電圧給電のときは給電点である。

正弦波のときは収束した時( $t=t_c$ )からの1周期の積分でよい。(付録A)

式(3.77)の積分を毎時刻行うと余分な配列は不要である。

ただし特定の点(給電点など)については時間波形を保存し、最後にフーリエ変換すると、メモリーを増大させることなく詳細な周波数特性を計算することができる。

### 3.11 分散性媒質

比誘電率が周波数の関数として次式で表される場合、

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) - j\epsilon_r''(\omega) = \epsilon_\infty + \chi_e(\omega) \quad \left( \epsilon_\infty \equiv \lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon_r(\omega) \right) \quad (3.78)$$

Maxwell方程式(2-7)で $\sigma=0$ とおいた式は次式のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon_\infty \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\chi_e \otimes \mathbf{E}) \quad (3.79)$$

ここで式(3.79)の右辺第2項は畳み込み積分である。

$$\chi_e \otimes \mathbf{E}(t) \equiv \int_0^t \chi_e(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) d\tau \quad (3.80)$$

$$\chi_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_e(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.81)$$

電磁界を式(2.9)(2.10)のように分解して、入射磁界に関する式(2.11)を用いると式(3.79)は式(3.1)に対応して次式のようになる。

$$\epsilon_\infty \frac{\partial \mathbf{E}^s}{c \partial t} = \nabla \times Z \mathbf{H}^s - \frac{\partial}{c \partial t} (\chi_e \otimes \mathbf{E}) - (\epsilon_\infty - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} \quad (3.82)$$

式(3.82)を時刻 $n+1/2$ で離散化する。

まず、

$$(\chi_e \otimes \mathbf{E}) \Big|_{t=n\Delta t} = \int_0^{n\Delta t} \chi_e(\tau) \mathbf{E}(n\Delta t - \tau) d\tau = \sum_{m=0}^{n-1} \chi_e^m \mathbf{E}^{n-m} \quad (3.83)$$

$$\chi_e^m \equiv \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi_e(\tau) d\tau \quad (3.84)$$

より、

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (\chi_e \otimes \mathbf{E}) \Big|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t} &= (\chi_e \otimes \mathbf{E}) \Big|_{t=(n+1)\Delta t} - (\chi_e \otimes \mathbf{E}) \Big|_{t=n\Delta t} \\ &= \sum_{m=0}^n \chi_e^m \mathbf{E}^{n+1-m} - \sum_{m=0}^{n-1} \chi_e^m \mathbf{E}^{n-m} \\ &= \chi_e^0 \mathbf{E}^{n+1} - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta \chi_e^m \mathbf{E}^{n-m} \\ &= \chi_e^0 (\mathbf{E}^{s,n+1} + \mathbf{E}^{i,n+1}) - \Phi_e^n \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\Delta \chi_e^m \equiv \chi_e^m - \chi_e^{m+1} \quad (3.86)$$

$$\Phi_e^n \equiv \sum_{m=0}^{n-1} \Delta \chi_e^m \mathbf{E}^{n-m} \quad (3.87)$$

であるから、式(3.82)は、

$$\epsilon_\infty \frac{\mathbf{E}^{s,n+1} - \mathbf{E}^{s,n}}{c \Delta t} = \nabla \times Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{c \Delta t} \left\{ \chi_e^0 (\mathbf{E}^{s,n+1} + \mathbf{E}^{i,n+1}) - \Phi_e^n \right\} - (\epsilon_\infty - 1) \frac{\partial \mathbf{E}^i}{c \partial t} \Bigg|_{(n+1)\Delta t} \quad (3.88)$$

となり、これを  $\mathbf{E}^{s,n+1}$  について解くと、次式が得られる。

$$\mathbf{E}^{s,n+1} = c_1 \mathbf{E}^{s,n} + c_2 (c \Delta t) \nabla \times Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} - c_3 \Delta t \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} \Bigg|_{(n+1)\Delta t} - c_4 \mathbf{E}^{i,n+1} + c_2 \Phi_e^n \quad (3.89)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\epsilon_\infty}{\epsilon_\infty + \chi_e^0} \\ c_2 &= \frac{1}{\epsilon_\infty + \chi_e^0} \\ c_3 &= \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + \chi_e^0} \\ c_4 &= \frac{\chi_e^0}{\epsilon_\infty + \chi_e^0} \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

式(3.89)を式(3.4)と比べると右辺第5項が加わり、式(3.90)を式(3.5)と比べると  $\epsilon_r \rightarrow \epsilon_\infty$ 、

$Z \sigma c \Delta t \rightarrow \chi_e^0$  と置き換えられることがわかる。

また、文献[2]と異なり、式(3.87)において電界を分解しないことが大切である。このために、入射波のパルス形状が何であっても解くことができる。

同様に、比透磁率が次式の分散性を持つとき、

$$\mu_r(\omega) = \mu_r'(\omega) - j\mu_r''(\omega) = \mu_\infty + \chi_h(\omega) \quad \left( \mu_\infty \equiv \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu_r(\omega) \right) \quad (3.91)$$

磁界の離散式は以下ようになる。

$$Z \mathbf{H}^{s,n+\frac{1}{2}} = d_1 Z \mathbf{H}^{s,n-\frac{1}{2}} - d_2 (c \Delta t) \nabla \times \mathbf{E}^{s,n} - d_3 \Delta t \frac{\partial Z \mathbf{H}^i}{\partial t} \Bigg|_{(n+\frac{1}{2})\Delta t} - d_4 Z \mathbf{H}^{i,n+\frac{1}{2}} + d_2 \Phi_h^n \quad (3.92)$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{\mu_\infty}{\mu_\infty + \chi_h^0} \\ d_2 &= \frac{1}{\mu_\infty + \chi_h^0} \\ d_3 &= \frac{\mu_\infty - 1}{\mu_\infty + \chi_h^0} \\ d_4 &= \frac{\chi_h^0}{\mu_\infty + \chi_h^0} \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

$$\Phi_h^n \equiv \sum_{m=0}^{n-1} \Delta \chi_h^m Z \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}-m} \quad (3.94)$$

$$\Delta \chi_h^m \equiv \chi_h^m - \chi_h^{m+1} \quad (3.95)$$

$$\chi_h^m \equiv \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi_h(\tau) d\tau \quad (3.96)$$

式(3.87) (3.94)を計算するには、一般にその点のすべての過去の電界と磁界が必要になり、必要メモリ

一が大きくなる。ただし、以下で述べるように特定の分散関数のとき効率よく計算することができる。  
[2]-[4]

比誘電率の分散関数として、以下の式を考える。

$$\chi_e(\omega) = \frac{a_e}{j\omega} + \frac{b_e}{c_e + j\omega} = \left\{ \frac{b_e c_e}{c_e^2 + \omega^2} \right\} - j \left\{ \frac{a_e}{\omega} + \frac{b_e \omega}{c_e^2 + \omega^2} \right\} \quad (3.97)$$

ここで  $a_e, b_e, c_e$  は定数であり、その次元は[1/s]である。

式(3.97)は特殊な場合として、以下のように一次 Debye 分散と一次 Drude 分散を含むので、ここでは「拡張 Debye/Drude 分散」と呼ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r(\omega) &= \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \left( \text{1st Debye dispersion, } a_e = 0, b_e = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{t_0}, c_e = \frac{1}{t_0} \right) \\ \epsilon_r(\omega) &= \epsilon_\infty + \frac{\omega_p^2}{j\omega(\omega_c + j\omega)} \left( \text{1st Drude dispersion, } a_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_c}, b_e = -\frac{\omega_p^2}{\omega_c}, c_e = \omega_c \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.98)$$

以下、式(3.97)のときの式(3.87)の計算法を述べる。

公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c + j\omega} e^{j\omega t} d\omega = e^{-ct} U(t) \quad (c > 0) \quad (3.99)$$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (3.100)$$

より、式(3.81)は次式になる。

$$\chi_e(t) = (a_e + b_e e^{-c_e t}) U(t) \quad (3.101)$$

これより、式(3.84) (3.86)は次式になる。

$$\chi_e^m = a_e \Delta t + \frac{b_e}{c_e} (1 - e^{-c_e \Delta t}) e^{-m c_e \Delta t} \quad (3.102)$$

$$\Delta \chi_e^m = \frac{b_e}{c_e} (1 - e^{-c_e \Delta t})^2 e^{-m c_e \Delta t} \quad (3.103)$$

このとき、

$$\Delta \chi_e^{m+1} = K_e \Delta \chi_e^m \quad (3.104)$$

$$K_e = e^{-c_e \Delta t} \quad (3.105)$$

が成り立つので、式(3.87)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_e^n &= \Delta \chi_e^0 \mathbf{E}^n + \sum_{m=1}^{n-1} \Delta \chi_e^m \mathbf{E}^{n-m} \\ &= \Delta \chi_e^0 \mathbf{E}^n + \sum_{m=0}^{n-2} \Delta \chi_e^{m+1} \mathbf{E}^{n-1-m} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta \chi_e^0 \mathbf{E}^n + K_e \sum_{m=0}^{n-2} \Delta \chi_e^m \mathbf{E}^{n-1-m} \\ &= \Delta \chi_e^0 \mathbf{E}^n + K_e \Phi_e^{n-1} \quad (n > 0) \\ \Phi_e^0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.107)$$

これより、 $\Phi_e^n$  はそのときの電界と前時刻の  $\Phi_e^{n-1}$  とから帰納的に計算できる (RC 法: Recursive Convolution 法)。必要メモリーは分散性媒質内の電界が 2 倍になるだけである。

式(3.89)の計算で必要になる係数は式(3.105)と以下のものである。

$$\chi_e^0 = a_e \Delta t + \frac{b_e}{c_e} (1 - e^{-c_e \Delta t}) = a_e \Delta t + \frac{b_e}{c_e} (1 - K_e) \quad (3.108)$$

$$\Delta \chi_e^0 = \frac{b_e}{c_e} (1 - e^{-c_e \Delta t})^2 = \frac{b_e}{c_e} (1 - K_e)^2 \quad (3.109)$$

比透磁率が分散性を持つときも同様にして以下の式で計算できる。

$$\chi_h(\omega) = \frac{a_h}{j\omega} + \frac{b_h}{c_h + j\omega} = \left\{ \frac{b_h c_h}{c_h^2 + \omega^2} \right\} - j \left\{ \frac{a_h}{\omega} + \frac{b_h \omega}{c_h^2 + \omega^2} \right\} \quad (3.110)$$

$$\Phi_h^n = \Delta \chi_h^0 Z \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} + K_h \Phi_h^{n-1} \quad (n > 0) \quad (3.111)$$

$$\Phi_h^0 = 0 \quad (3.112)$$

$$\chi_h^0 = a_h \Delta t + \frac{b_h}{c_h} (1 - K_h) \quad (3.113)$$

$$\Delta \chi_h^0 = \frac{b_h}{c_h} (1 - K_h)^2 \quad (3.114)$$

$$K_h = e^{-c_h \Delta t} \quad (3.115)$$

時間領域差分法で負の誘電率または透磁率を入力すると発散する(分散を持たない負の誘電率または透磁率の物質は存在しない)が、特定の周波数で負の誘電率または透磁率になる物体の計算は、本節の方法を用いて計算することができる。

ある周波数  $\omega$  での複素比誘電率と複素比透磁率  $\bar{\epsilon}'_r - j\bar{\epsilon}''_r$ ,  $\bar{\mu}'_r - j\bar{\mu}''_r$  ( $\bar{\epsilon}'_r < 0, \bar{\mu}'_r < 0$ ) を与えたとき、分散式(3.97) (3.110)は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \epsilon_\infty + \frac{b_e c_e}{c_e^2 + \omega^2} \right\} - j \left\{ \frac{a_e}{\omega} + \frac{b_e \omega}{c_e^2 + \omega^2} \right\} &= \bar{\epsilon}'_r - j\bar{\epsilon}''_r \\ \left\{ \mu_\infty + \frac{b_h c_h}{c_h^2 + \omega^2} \right\} - j \left\{ \frac{a_h}{\omega} + \frac{b_h \omega}{c_h^2 + \omega^2} \right\} &= \bar{\mu}'_r - j\bar{\mu}''_r \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

それぞれは四つの未知数  $(\epsilon_\infty, a_e, b_e, c_e), (\mu_\infty, a_h, b_h, c_h)$  に対して二つの方程式(実部・虚部)なので解は無数に存在するが、例えば以下の解をとる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\infty &= 1 \\ a_e &= \left\{ \bar{\epsilon}''_r + \frac{(\epsilon_\infty - \bar{\epsilon}'_r)^2}{\bar{\epsilon}''_r} \right\} \omega \\ b_e &= -a_e \\ c_e &= \left( \frac{\bar{\epsilon}''_r}{\epsilon_\infty - \bar{\epsilon}'_r} \right) \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.117)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \mu_\infty = 1 \\
 a_h &= \left\{ \bar{\mu}_r'' + \frac{(\mu_\infty - \bar{\mu}_r')^2}{\bar{\mu}_r''} \right\} \omega \\
 b_h &= -a_h \\
 c_h &= \left( \frac{\bar{\mu}_r''}{\mu_\infty - \bar{\mu}_r'} \right) \omega
 \end{aligned} \right\} \quad (3.118)$$

このとき、損失が小さくても ( $\bar{\epsilon}_r'' \ll 1$ )、式(3.105)(3.108)と  $c_e \Delta t \ll 1$  から  $\chi_e^0 \approx 0$  となり、式(3.90)の第一式は  $c_1 \approx 1$  となり、式(3.89)は安定になる。同じことは磁性体についても言える。

## 4 周波数領域差分法

### 4.1 EH法の離散化

角周波数  $\omega$  の調和界を考え、式(2.17)(2.18)で  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$  とおくと次式が得られる。

$$\nabla \times Z \mathbf{H}^s - (jk_0 \epsilon_r + Z \sigma) \mathbf{E}^s = \{jk_0(\epsilon_r - 1) + Z \sigma\} \mathbf{E}^i \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \left( jk_0 \mu_r + \frac{\sigma^*}{Z} \right) Z \mathbf{H}^s = - \left\{ jk_0(\mu_r - 1) + \frac{\sigma^*}{Z} \right\} Z \mathbf{H}^i \quad (4.2)$$

ここで  $k_0$  は真空の波数である。

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (4.3)$$

複素比誘電率と複素比透磁率を次式で定義する。

$$\tilde{\epsilon}_r \equiv \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \epsilon_r - j \frac{Z \sigma}{k_0} \quad (4.4)$$

$$\tilde{\mu}_r \equiv \mu_r - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_0} = \mu_r - j \frac{\sigma^*}{k_0 Z} \quad (4.5)$$

これを式(4.1)(4.2)に代入すると次式が得られる。

$$\nabla \times Z \mathbf{H}^s - jk_0 \tilde{\epsilon}_r \mathbf{E}^s = jk_0(\tilde{\epsilon}_r - 1) \mathbf{E}^i \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + jk_0 \tilde{\mu}_r Z \mathbf{H}^s = -jk_0(\tilde{\mu}_r - 1) Z \mathbf{H}^i \quad (4.7)$$

EH法では式(4.6)(4.7)を空間領域で差分化する。

式(4.6)のX成分を離散化すると、

$$\begin{aligned} & -jk_0 \tilde{\epsilon}_r \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left\{ ZH_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - ZH_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ ZH_y \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - ZH_y \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & = jk_0 \left\{ \tilde{\epsilon}_r \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - 1 \right\} E_x^i \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。以下、離散式の中では  $E^s, H^s$  を単に  $E, H$  と書く。

$\tilde{\epsilon}_r$  は Yee 格子の電界点での値を使用するので第一インデックスが半整数になる。

行列を対称化するために式(4.8)の両辺に電界要素の占有する体積  $\Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k$  をかけると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -jk_0 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k \tilde{\epsilon}_r \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ & + \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta z_k \left\{ ZH_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - ZH_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right\} - \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \left\{ ZH_y \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - ZH_y \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ & = jk_0 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k \left\{ \tilde{\epsilon}_r \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - 1 \right\} E_x^i \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Y, Z成分についてはX, Y, Zを巡回させて次式を得る。



$$\begin{aligned}
& -jk_0 \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k \Delta x_i \tilde{\epsilon}_r \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) \\
& + \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta x_i \left\{ ZH_x \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) - ZH_x \left( i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2} \right) \right\} - \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k \left\{ ZH_z \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - ZH_z \left( k, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \right\} \quad (4.10) \\
& = jk_0 \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k \Delta x_i \left\{ \tilde{\epsilon}_r \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) - 1 \right\} E_y^i \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -jk_0 \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta x_i \Delta y_j \tilde{\epsilon}_r \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) \\
& + \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta y_j \left\{ ZH_y \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) - ZH_y \left( j, k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2} \right) \right\} - \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta x_i \left\{ ZH_x \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) - ZH_x \left( i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) \right\} \quad (4.11) \\
& = jk_0 \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta x_i \Delta y_j \left\{ \tilde{\epsilon}_r \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) - 1 \right\} E_z^i \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right)
\end{aligned}$$

同様に式(4.7)のXYZ成分を離散化し、磁界要素の占有する体積をかけると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& jk_0 \Delta x_i \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \tilde{\mu}_r \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) ZH_x \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) \\
& + \Delta x_i \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \left\{ E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j+1 \right) - E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) \right\} - \Delta x_i \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \left\{ E_y \left( j+\frac{1}{2}, k+1, i \right) - E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) \right\} \quad (4.12) \\
& = -jk_0 \Delta x_i \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \left\{ \tilde{\mu}_r \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_x^i \left( i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& jk_0 \Delta y_j \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \tilde{\mu}_r \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) ZH_y \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) \\
& + \Delta y_j \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \left\{ E_x \left( i+\frac{1}{2}, j, k+1 \right) - E_x \left( i+\frac{1}{2}, j, k \right) \right\} - \Delta y_j \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \left\{ E_z \left( k+\frac{1}{2}, i+1, j \right) - E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) \right\} \quad (4.13) \\
& = -jk_0 \Delta y_j \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \left\{ \tilde{\mu}_r \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_y^i \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& jk_0 \Delta z_k \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \tilde{\mu}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) ZH_z \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \\
& + \Delta z_k \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \left\{ E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i+1 \right) - E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) \right\} - \Delta z_k \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \left\{ E_x \left( i+\frac{1}{2}, j+1, k \right) - E_x \left( i+\frac{1}{2}, j, k \right) \right\} \quad (4.14) \\
& = -jk_0 \Delta z_k \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \tilde{\mu}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_z^i \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$\tilde{\mu}_r$  は Yee 格子の磁界点での値を使用するので第二、第三インデックスが半整数になる。

式(4.9)-(4.14)よりEH法は5点差分スキームになる(図4.1)。すなわち、1行が5個の非零要素から成る疎行列になる。なお、対角成分のみが複素数でその他は実数である。また、行列の大きさは式(2.25)

(2.26)の  $N_E + N_H$  である。

式(4.9)-(4.14)をまとめて行列表示したものを

$$A \mathbf{x} = \mathbf{B} \quad (4.15)$$

と書くと、これが対称行列になることは以下のように確認することができる。

$$\begin{aligned}
& A \left( \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right], \hat{H}_y \left[ j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right] \right) = A \left( \hat{H}_y \left[ j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right], \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right] \right) = -\Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \\
& A \left( \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right], \hat{H}_z \left[ k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right] \right) = A \left( \hat{H}_z \left[ k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right], \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right] \right) = +\Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta z_k \quad (4.16)
\end{aligned}$$

その他についても同様である。

ここで  $\hat{E}_x\left[i+\frac{1}{2}, j, k\right]$  等は  $E_x\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)$  等の要素番号である。

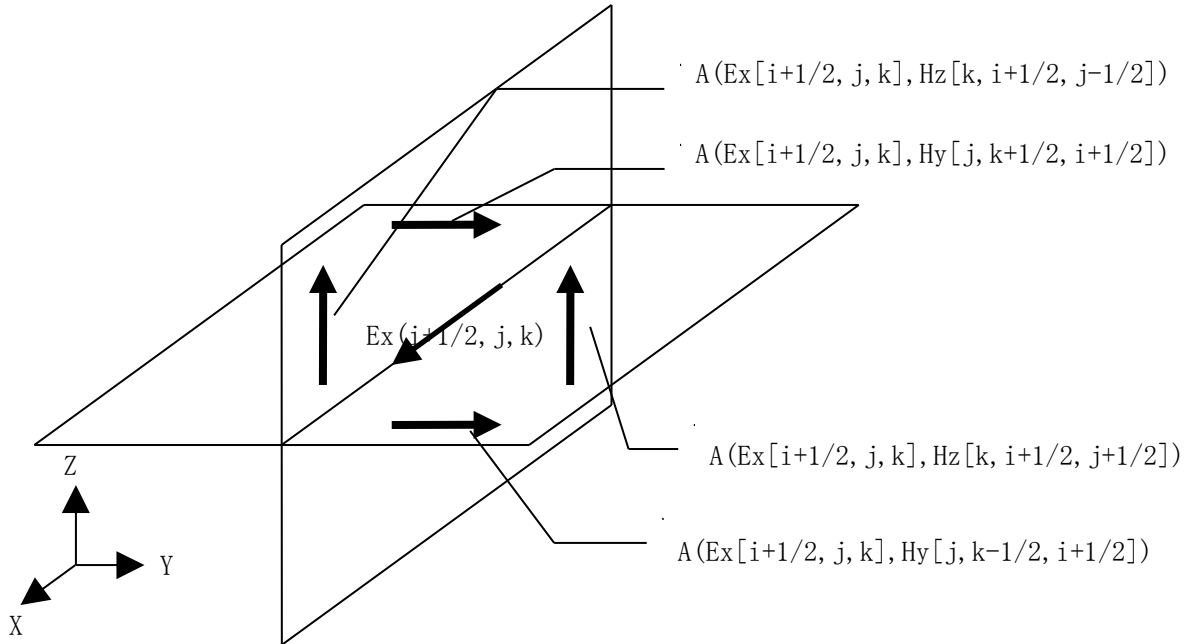


図 4.1 5点差分と行列要素

## 4.2 EH法の吸収境界条件

計算領域の境界では、外部に放射する境界条件を電界と磁界の接線成分に適用する。

例えば-X境界面での電界と磁界のY,Z成分については

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta z_k \exp\left(jk \frac{\Delta x_0}{2}\right) ZH_z\left(k, -\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) + \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta z_k E_y\left(j-\frac{1}{2}, k, 0\right) &= 0 \\ \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta y_j \exp\left(jk \frac{\Delta x_0}{2}\right) ZH_y\left(j, k-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta y_j E_z\left(k-\frac{1}{2}, 0, j\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

となり、+X境界面での電界と磁界のY,Z成分については

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta z_k \exp\left(jk \frac{\Delta x_{N_x}}{2}\right) ZH_z\left(k, N_x+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) - \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta z_k E_y\left(j-\frac{1}{2}, k, N_x\right) &= 0 \\ \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta y_j \exp\left(jk \frac{\Delta x_{N_x}}{2}\right) ZH_y\left(j, k-\frac{1}{2}, N_x+\frac{1}{2}\right) + \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta y_j E_z\left(k-\frac{1}{2}, N_x, j\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

となる。行列を対称に保つために式(4.9)-(4.11)を参考に係数をかけている。また、左辺の第1項の指数関数内の符号はすべての方向で正になる。これは外向波の距離因子が  $\exp(-jkr)$  であることによる。またZとkは境界の媒質での波動インピーダンスと波数である。

Y,Z境界面についてはX,Y,Zを巡回させて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta x_i \exp\left(jk \frac{\Delta y_0}{2}\right) ZH_x\left(i, -\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) + \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta x_i E_z\left(k-\frac{1}{2}, i, 0\right) &= 0 \\ \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta z_k \exp\left(jk \frac{\Delta y_0}{2}\right) ZH_z\left(k, i-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta z_k E_x\left(i-\frac{1}{2}, 0, k\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta x_i \exp\left(jk \frac{\Delta y_{N_y}}{2}\right) ZH_x\left(i, N_y+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) - \Delta z_{k-\frac{1}{2}} \Delta x_i E_z\left(k-\frac{1}{2}, i, N_y\right) &= 0 \\ \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta z_k \exp\left(jk \frac{\Delta y_{N_y}}{2}\right) ZH_z\left(k, i-\frac{1}{2}, N_y+\frac{1}{2}\right) + \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta z_k E_x\left(i-\frac{1}{2}, N_y, k\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta y_j \exp\left(jk \frac{\Delta z_0}{2}\right) ZH_y\left(j, -\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) + \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta y_j E_x\left(i-\frac{1}{2}, j, 0\right) &= 0 \\ \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_i \exp\left(jk \frac{\Delta z_0}{2}\right) ZH_x\left(i, j-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_i E_y\left(j-\frac{1}{2}, 0, i\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta y_j \exp\left(jk \frac{\Delta z_{N_z}}{2}\right) ZH_y\left(j, N_z+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}\right) - \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta y_j E_x\left(i-\frac{1}{2}, j, N_z\right) &= 0 \\ \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_i \exp\left(jk \frac{\Delta z_{N_z}}{2}\right) ZH_x\left(i, j-\frac{1}{2}, N_z+\frac{1}{2}\right) + \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_i E_y\left(j-\frac{1}{2}, N_z, i\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

### 4.3 E法の離散化

次式で複素比磁気抵抗率を定義する。

$$\tilde{\nu}_r \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}_r} \quad (4.23)$$

これを式(4.7)に代入すると次式が得られる。

$$\tilde{\nu}_r \nabla \times \mathbf{E}^s + j k_0 Z \mathbf{H}^s = j k_0 (\tilde{\nu}_r - 1) Z \mathbf{H}^i \quad (4.24)$$

式(4.6)(4.24)から  $\mathbf{H}^s$  を消去すると次式が得られる。

$$\nabla \times \tilde{\nu}_r \nabla \times \mathbf{E}^s - k_0^2 \tilde{\epsilon}_r \mathbf{E}^s = j k_0 \nabla \times (\tilde{\nu}_r - 1) Z \mathbf{H}^i + k_0^2 (\tilde{\epsilon}_r - 1) \mathbf{E}^i \quad (4.25)$$

E法では式(4.25)を空間領域で差分化する。

この場合、Yee格子の電界計算点のみを考える。

式(4.25)の左辺第一項のX成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \tilde{\mathbf{v}}_r \nabla \times \mathbf{E}^s \Big|_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\
&= \frac{1}{\Delta y_j} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \nabla \times \mathbf{E}_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \nabla \times \mathbf{E}_z \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&- \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \nabla \times \mathbf{E}_y \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \nabla \times \mathbf{E}_y \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{E_y \left( j + \frac{1}{2}, k, i + 1 \right) - E_y \left( j + \frac{1}{2}, k, i \right)}{\Delta x_{i + \frac{1}{2}}} - \frac{E_x \left( i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right) - E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{\Delta y_{j + \frac{1}{2}}} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{E_y \left( j - \frac{1}{2}, k, i + 1 \right) - E_y \left( j - \frac{1}{2}, k, i \right)}{\Delta x_{i + \frac{1}{2}}} - \frac{E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - E_x \left( i + \frac{1}{2}, j - 1, k \right)}{\Delta y_{j - \frac{1}{2}}} \right\} \right] \\
&- \frac{1}{\Delta z_k} \left[ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{\Delta z_{k + \frac{1}{2}}} - \frac{E_z \left( k + \frac{1}{2}, i + 1, j \right) - E_z \left( k + \frac{1}{2}, i, j \right)}{\Delta x_{i + \frac{1}{2}}} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k - 1 \right)}{\Delta z_{k - \frac{1}{2}}} - \frac{E_z \left( k - \frac{1}{2}, i + 1, j \right) - E_z \left( k - \frac{1}{2}, i, j \right)}{\Delta x_{i + \frac{1}{2}}} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

また、式(4.25)の右辺第一項のX成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& jk_0 \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}}_r \mu_a - 1) Z \mathbf{H}^i \Big|_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\
&= \frac{jk_0}{\Delta y_j} \left[ \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \mu_a - 1 \right\} ZH_z^i \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \mu_a - 1 \right\} ZH_z^i \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&- \frac{jk_0}{\Delta z_k} \left[ \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \mu_a - 1 \right\} ZH_y^i \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \mu_a - 1 \right\} ZH_y^i \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

式(4.25)のX成分に式(4.26)(4.27)を代入し、さらに行列を対称にするために、両辺に電界要素の占有する体積  $\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k$  をかけると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta y_{j + \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta y_{j - \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta z_{k + \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta z_{k - \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - k_0^2 \Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k \tilde{\epsilon}_r \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \right\} E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\
& - \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta y_{j + \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right) - \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta y_{j - \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( k, i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j - 1, k \right) \\
& - \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta z_{k + \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - \frac{\Delta x_{i + \frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta z_{k - \frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{v}}_r \left( j, k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) E_x \left( i + \frac{1}{2}, j, k - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta z_k \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \left\{ E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i+1 \right) - E_y \left( j+\frac{1}{2}, k, i \right) \right\} \\
& -\Delta z_k \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \left\{ E_y \left( j-\frac{1}{2}, k, i+1 \right) - E_y \left( j-\frac{1}{2}, k, i \right) \right\} \\
& +\Delta y_j \tilde{v}_r \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) \left\{ E_z \left( k+\frac{1}{2}, i+1, j \right) - E_z \left( k+\frac{1}{2}, i, j \right) \right\} \\
& -\Delta y_j \tilde{v}_r \left( j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) \left\{ E_z \left( k-\frac{1}{2}, i+1, j \right) - E_z \left( k-\frac{1}{2}, i, j \right) \right\} \\
& =jk_0 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta z_k \left[ \left\{ \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_z^i \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - \left\{ \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_z^i \left( k, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \right] \\
& -jk_0 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \left[ \left\{ \tilde{v}_r \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_y^i \left( j, k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) - \left\{ \tilde{v}_r \left( j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} ZH_y^i \left( j, k-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.28) \\
& +k_0^2 \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta y_j \Delta z_k \left\{ \tilde{\epsilon}_r \left( i+\frac{1}{2}, j, k \right) - 1 \right\} E_x^i \left( i+\frac{1}{2}, j, k \right) \quad (i=0, \dots, N_x-1 \quad j=1, \dots, N_y-1 \quad k=1, \dots, N_z-1)
\end{aligned}$$

Y, Z成分についてはX, Y, Zを巡回させる。

式(4.28)よりE法は13点差分スキームになる(図4.2)。すなわち、1行が13個の非零要素から成る疎行列になる。なお、すべての成分が複素数である。ただし、磁性体がないときは非対角成分は実数である。また、行列の大きさは式(2.25)の $N_E$ である。

連立一次方程式を行列表示したものを式(4.15)と書くと、Aが対称行列になることは以下のように確認することができる。

$$A \left( \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right], \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j+1, k \right] \right) = A \left( \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j+1, k \right], \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right] \right) = -\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \quad (4.29)$$

$$A \left( \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right], \hat{E}_y \left[ j+\frac{1}{2}, k, i \right] \right) = A \left( \hat{E}_y \left[ j+\frac{1}{2}, k, i \right], \hat{E}_x \left[ i+\frac{1}{2}, j, k \right] \right) = -\Delta z_k \tilde{v}_r \left( k, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \quad (4.30)$$

その他についても同様である。

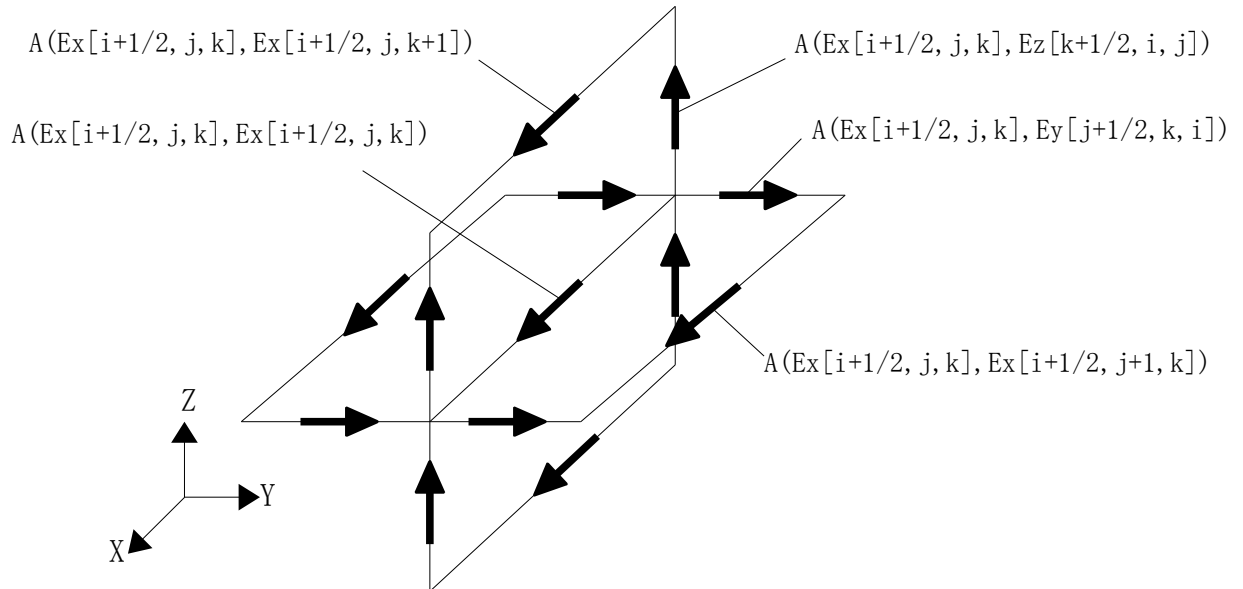


図4.2 13点差分と行列要素(E法)

#### 4.4 E法の吸収境界条件

計算領域の境界では、外部に放射する境界条件を電界の接線成分に適用する。

例えば-X境界面でのEy, Ez成分については

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r\left(k, \frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) & \left[ \frac{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta x_{\frac{1}{2}}} \exp\left(jk \Delta x_{\frac{1}{2}}\right) E_y\left(j+\frac{1}{2}, k, 0\right) - \frac{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta x_{\frac{1}{2}}} E_y\left(j+\frac{1}{2}, k, 1\right) \right. \\ & \left. + \Delta z_k \left\{ E_x\left(\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x\left(\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] = 0 \quad (j=0, \dots, N_y-1, k=1, \dots, N_z-1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r\left(j, k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \left[ \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta x_{\frac{1}{2}}} \exp\left(jk \Delta x_{\frac{1}{2}}\right) E_z\left(k+\frac{1}{2}, 0, j\right) - \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta x_{\frac{1}{2}}} E_z\left(k+\frac{1}{2}, 1, j\right) \right. \\ & \left. + \Delta y_j \left\{ E_x\left(\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x\left(\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] = 0 \quad (j=1, \dots, N_y-1, k=0, \dots, N_z-1) \end{aligned} \quad (4.32)$$

となり、+X境界面でのEy, Ez成分については

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r\left(k, N_x-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) & \left[ \frac{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}} \exp\left(jk \Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}\right) E_y\left(j+\frac{1}{2}, k, N_x\right) - \frac{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta z_k}{\Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}} E_y\left(j+\frac{1}{2}, k, N_x-1\right) \right. \\ & \left. - \Delta z_k \left\{ E_x\left(N_x-\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x\left(N_x-\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] = 0 \quad (j=0, \dots, N_y-1, k=1, \dots, N_z-1) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r\left(j, k+\frac{1}{2}, N_x-\frac{1}{2}\right) & \left[ \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}} \exp\left(jk \Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}\right) E_z\left(k+\frac{1}{2}, N_x, j\right) - \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}} \Delta y_j}{\Delta x_{N_x-\frac{1}{2}}} E_z\left(k+\frac{1}{2}, N_x-1, j\right) \right. \\ & \left. - \Delta y_j \left\{ E_x\left(N_x-\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x\left(N_x-\frac{1}{2}, j, k\right) \right\} \right] = 0 \quad (j=1, \dots, N_y-1, k=0, \dots, N_z-1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。

左辺の第1, 2項が放射条件を表し、第3, 4項が行列を対称に保つために式(4.28)を参考に付加したものである。左辺の第1項の指数関数内の符号はすべての方向で正である。これは外向波の距離因子が  $\exp(-jkr)$  であることによる。また波数kは境界の媒質での波数である。

Y, Z境界面についてはX, Y, Zを巡回させる。

## 4.5 周期境界条件

ある方向に電磁界が周期的になる境界条件を周期境界条件と呼ぶ。

例えばX方向に周期的であるときは、 $i=N_x$ 面の電磁界成分を方程式から除外し、 $i=0$ 面については通常の離散式で計算する。その際、対応する要素がないものは反対側の要素を使用する。それ以外の境界面では吸収境界条件を使用する。

## 4.6 Dirichlet条件

完全導体の中と給電点では電磁界が既知量になる。このような条件(Dirichlet条件)では、以下の操作を

行えば行列の対称性を保つことができる[7][8]。

$$\left. \begin{aligned} B_i &\leftarrow B_i - \sum_{j \in D} A_{ij} \bar{x}_j \\ A_{ij} &= A_{ji} = 0 \quad (i \neq j) \\ A_{ii} &= 1 \end{aligned} \right\} (i \in D) \quad (4.35)$$

ここで、DはDirichlet条件が適用される要素の集合、 $\bar{x}_j$ はDにおける既知の電磁界である。上記の操作では行列の大きさは変わらない。

#### 4.7 平面波入射

平面波入射のときの入射電磁界は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{e} \exp(jk_0 \mathbf{r} \cdot \hat{r}^i) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \times \hat{r}^i \quad (4.37)$$

ここで、 $\hat{e}, \hat{r}^i$ は式(3.47)(3.48)で定義されたものである。

ビーム入射のときは式(4.36)(4.37)の電磁界に式(3.54)の因子がかけられる。

#### 4.8 電圧給電

電圧給電のときは給電点で次式で与えられる。(Z方向の場合)

$$E_z^i = \frac{V^i}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \quad (4.38)$$

#### 4.9 共役勾配法

連立一次方程式(4.15)は複素数対称疎行列である。これは反復法である共役勾配法(CG法:Conjugate Gradient method)により効率よく解くことができる。[7][9][10]

共役勾配法のアルゴリズムは以下の通りである。

(1) 適当な初期ベクトル  $\mathbf{x}_0$  を選んで次の計算を行う。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

(2)  $n=0, 1, 2, \dots$  について次の手順を繰り返す。(ε:適当な微小量)

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{u}_n &= A \mathbf{p}_n \\
 \alpha_n &= \frac{(\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n)}{(\mathbf{p}_n, \mathbf{u}_n)} \\
 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{p}_n \\
 \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n - \alpha_n \mathbf{u}_n \\
 \frac{\|\mathbf{r}_{n+1}\|}{\|\mathbf{B}\|} &< \epsilon \quad \text{ならば終了する} \\
 \beta_n &= \frac{(\mathbf{r}_{n+1}, \mathbf{r}_{n+1})}{(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n)} \\
 \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{r}_{n+1} + \beta_n \mathbf{p}_n
 \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

ここで  $\|\mathbf{x}\|$  はベクトルのノルム、 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  はベクトルの内積である。

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}\| &\equiv \left\{ \sum_i |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \sum_i x_i y_i
 \end{aligned} \quad (4.41)$$

なお、 $\|\mathbf{B}\|$  の計算ではDirichlet条件の行は除外する。

図4.3にEH法とE法の共役勾配法の収束例を示す。一般に収束反復回数についてEH法はE法の2-3倍であり、反復回数一回当たりの計算量はEH法はE法の約1.5倍である。以上から、EH法の計算時間はE法の3-4倍になりE法の方がすぐれている。

また、単精度演算では大規模問題で収束しないことが多いので、倍精度演算を行う必要がある。

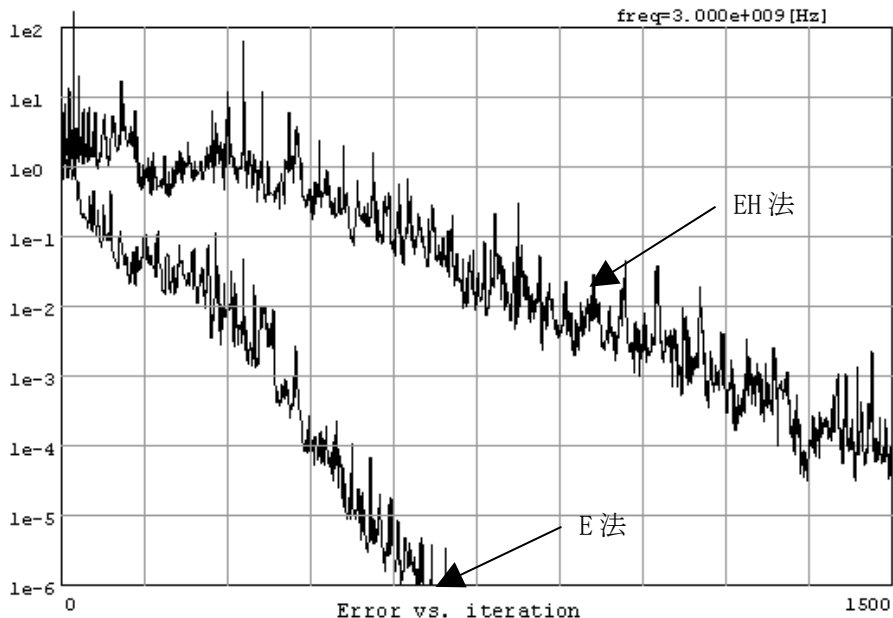


図4.3 共役勾配法の収束例 ( $N_x=N_y=N_z=50$ )



## 5 集中回路定数

特定の点に集中定数回路をおいたときの計算方法は以下の通りである[2]-[4]。回路の向きをZ方向とする。

### 5.1 抵抗

以下の物性値を持つ等価的な誘電体で置き換える。

$$\epsilon_r = 1 \quad (5.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{R} \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i \Delta y_j} \quad (5.2)$$

### 5.2 キャパシタ

以下の物性値を持つ等価的な誘電体で置き換える。

$$\epsilon_r = \frac{C}{\epsilon_0} \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i \Delta y_j} \quad (5.3)$$

$$\sigma = 0 \quad (5.4)$$

### 5.3 インダクタ

#### (1) 周波数領域差分法

周波数領域差分法では負の誘電率でも発散せず計算できるので、換算式  $j\omega L = \frac{1}{j\omega C}$  と式(5.3)を用いて以下の物性値を持つ等価的な誘電体で置き換える。

$$\epsilon_r = \frac{-1}{L\omega^2\epsilon_0} \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i \Delta y_j} \quad (5.5)$$

$$\sigma = 0 \quad (5.6)$$

#### (2) 時間領域差分法

時間領域差分法では負の誘電率を代入すると発散するので以下のように計算する。式(2.1)に式(2.3)を代入し、 $\epsilon = \epsilon_0$  とおくと次式が得られる。

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (5.7)$$

これにインダクタンスの定義式

$$I_z\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) = \frac{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}}{L} \int E_z\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) dt \quad (5.8)$$

を代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial E_z\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right)}{c \partial t} = \nabla \times Z \mathbf{H}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Big|_z - \frac{Z \Delta z_{k+\frac{1}{2}}}{L \Delta x_i \Delta y_j} \int E_z\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) dt \quad (5.9)$$

これを最新項について解くと次式が得られる。

$$E_z^{n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) = E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) + (c \Delta t) \nabla \times Z \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Big|_z - \frac{\mu_0 \Delta z_{k+\frac{1}{2}} (c \Delta t)^2}{L \Delta x_i \Delta y_j} \sum_{m=0}^n E_z^m\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \quad (5.10)$$

この式を時間的に逐次計算する。得られる左辺の値を用いて右辺第3項の和を毎回更新する。

#### 5.4 非線形回路素子

時間領域差分法での、任意の電圧・電流の特性 (V-I 特性) を持つ非線形回路素子の計算方法は以下の通りである。まず、V-I 特性の式を

$$I = F(V) \quad (5.11)$$

とする。式(5.7)を離散化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c \Delta t} \left\{ E_z^{n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) - E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \right\} \\ & = \nabla \times Z \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Big|_z - \frac{Z}{\Delta x_i \Delta y_j} F\left(E_z^{n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Delta z_{k+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

式(5.12)は未知数  $E_z^{n+1}$  に関する非線形方程式であり、変形すると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} & F(V) + aV + b = 0 \\ & V \equiv E_z^{n+1}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Delta z_{k+\frac{1}{2}} \\ & a \equiv \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{Z c \Delta t \Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \\ & b \equiv -\frac{\Delta x_i \Delta y_j}{Z c \Delta t} \left\{ E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) + c \Delta t \nabla \times Z \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Big|_z \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

これを Newton-Raphson 法によって解く。反復計算の初期値は前回の値  $V^0 = E_z^n\left(k+\frac{1}{2}, i, j\right) \Delta z_{k+\frac{1}{2}}$

であり、反復計算の式は次式である。

$$V^{i+1} = V^i - \frac{F(V^i) + aV^i + b}{F'(V^i) + a} \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (5.14)$$

式(5.14)の微分  $F'$  には差分を用いる。反復計算は通常 2-4 回で収束する。非線形性が強いなどの理由で

収束しないときは  $\Delta t$  を小さくすることが有効である。

## 6 近傍界

前章までの方法によって、時間領域と周波数領域の差分法によって、周波数領域の電界分布が計算された。これから各種の電磁界特性が計算される。なお、本章以降の電磁界は調和界であり複素数である。

### 6.1 磁界

磁界は式(2.8)で  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$  とし、式(4.5)を用いると

$$\mathbf{ZH} = \frac{j}{k_0 \tilde{\mu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \quad (6.1)$$

となる。従って Yee 格子面の中心での磁界の X 成分は

$$\begin{aligned} ZH_x \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) &= \frac{j}{k_0 \tilde{\mu}_r} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{j}{k_0 \tilde{\mu}_r} \left\{ \frac{E_z \left( k + \frac{1}{2}, i, j + 1 \right) - E_z \left( k + \frac{1}{2}, i, j \right)}{\Delta y_{j + \frac{1}{2}}} - \frac{E_y \left( j + \frac{1}{2}, k + 1, i \right) - E_y \left( j + \frac{1}{2}, k, i \right)}{\Delta z_{k + \frac{1}{2}}} \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

となる。Y, Z 成分については X, Y, Z を巡回させる。

### 6.2 電流

電流は式(2.1)から

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (6.3)$$

となる。これは導体の上では導電流、誘電体の中では変位電流を意味する。

### 6.3 電力損失

損失性媒質での電力損失密度と全電力損失は次式で計算される。

$$P_{loss}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{r}) |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \sigma^*(\mathbf{r}) |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 \quad (6.4)$$

$$P_{loss} = \int_V P_{loss}(\mathbf{r}) dV \quad (6.5)$$

### 6.4 電圧

電圧は次式で計算される。

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) + \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6.6)$$

ただし、電圧に物理的な意味があるのは、右辺の線積分が積分経路によらないときで、準静電界やTEM波の断面などがこれに相当する。

## 7 遠方界

等価原理[12]より、解析領域の境界面S上の電磁流から遠方界が計算される。

$$\mathbf{J} = +\hat{n} \times \mathbf{H}^s \quad (7.1)$$

$$\mathbf{M} = -\hat{n} \times \mathbf{E}^s \quad (7.2)$$

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = \int_S \mathbf{J} \exp(jk \mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \quad (7.3)$$

$$\mathbf{L}(\theta, \phi) = \int_S \mathbf{M} \exp(jk \mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \quad (7.4)$$

$$F_\theta(\theta, \phi) = ZN_\theta(\theta, \phi) + L_\phi(\theta, \phi) \quad (7.5)$$

$$F_\phi(\theta, \phi) = ZN_\phi(\theta, \phi) - L_\theta(\theta, \phi) \quad (7.6)$$

$$E_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix} \right\}}(r, \theta, \phi) = \frac{-jk \exp(-jkr)}{4\pi r} F_{\left\{ \begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix} \right\}}(\theta, \phi) \quad (7.7)$$

ここで  $\hat{n}$  は外向法線ベクトル、 $\hat{r}$  は原点から見た観測方向の単位ベクトル、 $k$  は式(4.38)で定義された波数である。

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \quad (7.8)$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta \quad (7.9)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \quad (7.10)$$

XYZ座標系では電磁界のXYZ成分が得られるので以下の変換式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= (\hat{\theta} \cdot \hat{x}) N_x + (\hat{\theta} \cdot \hat{y}) N_y + (\hat{\theta} \cdot \hat{z}) N_z \\ N_\phi &= (\hat{\phi} \cdot \hat{x}) N_x + (\hat{\phi} \cdot \hat{y}) N_y + (\hat{\phi} \cdot \hat{z}) N_z \\ L_\theta &= (\hat{\theta} \cdot \hat{x}) L_x + (\hat{\theta} \cdot \hat{y}) L_y + (\hat{\theta} \cdot \hat{z}) L_z \\ L_\phi &= (\hat{\phi} \cdot \hat{x}) L_x + (\hat{\phi} \cdot \hat{y}) L_y + (\hat{\phi} \cdot \hat{z}) L_z \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

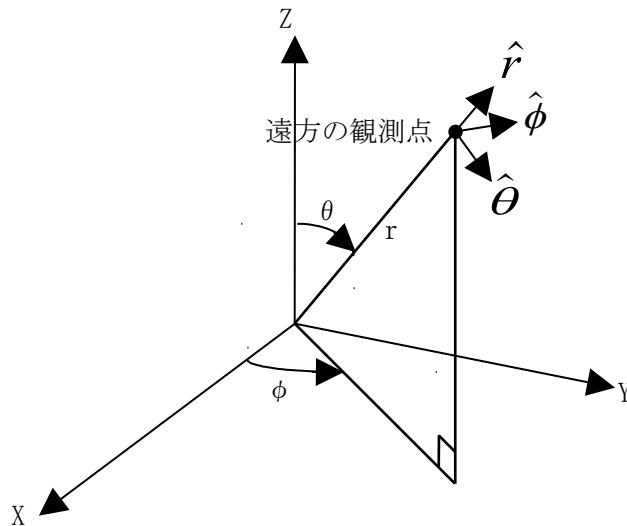


図7.1 遠方界と座標系

式(7.3)(7.4)の面積分は境界の半セル内側で行う。

例えば-X境界面では  $\hat{n} = -\hat{x}$  から電磁流は

$$\mathbf{M} = \hat{x} \times (\hat{y} E_y + \hat{z} E_z) = -\hat{y} E_z + \hat{z} E_y \quad (7.12)$$

$$Z\mathbf{J} = -\hat{x} \times (\hat{y} ZH_y + \hat{z} ZH_z) = \hat{y} ZH_z - \hat{z} ZH_y \quad (7.13)$$

となり、ポテンシャルは次式で計算される。

$$\begin{aligned} L_y &= - \int_{-X\text{面}} E_z(\mathbf{r}) \exp(jk\mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \\ &= - \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} E_z\left(k, \frac{1}{2}, j\right) S_{jk} \\ &= - \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \frac{1}{4} \left\{ E_z\left(k - \frac{1}{2}, 0, j\right) + E_z\left(k + \frac{1}{2}, 0, j\right) + E_z\left(k - \frac{1}{2}, 1, j\right) + E_z\left(k + \frac{1}{2}, 1, j\right) \right\} S_{jk} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} L_z &= \int_{-X\text{面}} E_y(\mathbf{r}) \exp(jk\mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \\ &= \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} E_y\left(j, k, \frac{1}{2}\right) S_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \frac{1}{4} \left\{ E_y\left(j - \frac{1}{2}, k, 0\right) + E_y\left(j + \frac{1}{2}, k, 0\right) + E_y\left(j - \frac{1}{2}, k, 1\right) + E_y\left(j + \frac{1}{2}, k, 1\right) \right\} S_{jk} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} ZN_y &= \int_{-X\text{面}} ZH_z(\mathbf{r}) \exp(jk\mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \\ &= \frac{j}{k} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \left\{ \frac{\partial E_y\left(j, k, \frac{1}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial E_x\left(\frac{1}{2}, j, k\right)}{\partial y} \right\} S_{jk} \\ &= \frac{j}{k} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \left[ \frac{1}{2\Delta x_1} \left\{ E_y\left(j + \frac{1}{2}, k, 1\right) + E_y\left(j - \frac{1}{2}, k, 1\right) - E_y\left(j + \frac{1}{2}, k, 0\right) - E_y\left(j - \frac{1}{2}, k, 0\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\Delta y_j} \left\{ E_x\left(\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x\left(\frac{1}{2}, j-1, k\right) \right\} \right] S_{jk} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} ZN_z &= - \int_{-X\text{面}} ZH_y(\mathbf{r}) \exp(jk\mathbf{r} \cdot \hat{r}) dS \\ &= \frac{j}{k} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \left\{ \frac{\partial E_z\left(k, \frac{1}{2}, j\right)}{\partial x} - \frac{\partial E_x\left(\frac{1}{2}, j, k\right)}{\partial z} \right\} S_{jk} \\ &= \frac{j}{k} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \left[ \frac{1}{2\Delta x_1} \left\{ E_z\left(k + \frac{1}{2}, 1, j\right) + E_z\left(k - \frac{1}{2}, 1, j\right) - E_z\left(k + \frac{1}{2}, 0, j\right) - E_z\left(k - \frac{1}{2}, 0, j\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\Delta z_k} \left\{ E_x\left(\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x\left(\frac{1}{2}, j, k-1\right) \right\} \right] S_{jk} \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$S_{jk} \equiv \exp \left[ jk \left\{ x_1 \left( \hat{r} \cdot \hat{x} \right) + y_j \left( \hat{r} \cdot \hat{y} \right) + z_k \left( \hat{r} \cdot \hat{z} \right) \right\} \right] \Delta y_j \Delta z_k \quad (7.18)$$

遠方界は同様にして計算した-X, +X, -Y, +Y, -Z, +Zの6面の積分の和となる。

遠方界の主軸と副軸は次式で計算される。(付録B)

$$E_{\left\{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}\right\}} = \left\{ \frac{1}{2} \left( |E_{\theta}| + |E_{\phi}| \pm |E_{\theta}^2 + E_{\phi}^2| \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.19)$$

遠方界の軸比は次式で計算される。

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = \left( \frac{|E_{\theta}| + |E_{\phi}| - |E_{\theta}^2 + E_{\phi}^2|}{|E_{\theta}| + |E_{\phi}| + |E_{\theta}^2 + E_{\phi}^2|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.20)$$

遠方界の右(左)旋円偏波電界は次式で計算される。

$$E_{\left\{\begin{matrix} RHCP \\ LHCP \end{matrix}\right\}} = \frac{E_{\theta} \pm jE_{\phi}}{\sqrt{2}} \quad (7.21)$$

付録Cから以下の関係がある。

$$E_{max}^2 + E_{min}^2 = |E_{RHCP}|^2 + |E_{LHCP}|^2 = |E_{\theta}|^2 + |E_{\phi}|^2 \quad (7.22)$$



## 8 アンテナ特性

### 8.1 入力インピーダンス

給電点の電圧、電流を $V_{in}$ 、 $I_{in}$ とすると、入力インピーダンスと入力アドミッタンスは次式で与えられる。

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} \quad (8.1)$$

$$Y_{in} = G_{in} + jB_{in} = \frac{1}{Z_{in}} \quad (8.2)$$

給電線の特性インピーダンスを $Z_0[\Omega]$ とすると、反射係数は次式で計算される。

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad (8.3)$$

VSWRおよび反射損は次式で計算される。

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (8.4)$$

$$\text{反射損} = 20 \log_{10} |\Gamma| \quad [dB] \quad (8.5)$$

### 8.2 利得

遠方界より、電力利得 $g_p$ 、指向性利得 $g_d$ 、放射効率 $\eta$ が次式で計算される。

$$\begin{aligned} g_p(\theta, \phi) &= \frac{1}{P_{in}} \frac{4\pi r^2}{2Z} \left\{ |E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right\} \\ &= \frac{k^2}{8\pi Z P_{in}} \left\{ |F_\theta(\theta, \phi)|^2 + |F_\phi(\theta, \phi)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$g_d(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta} g_p(\theta, \phi) \quad (8.7)$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta g_p(\theta, \phi) \quad (8.8)$$

$P_{in}$ は次式で計算される給電電力である( $n$ は給電点に関する和)。

$$P_{in} = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_{in}(n) I_{in}^*(n)) & \text{(反射損なし)} \\ \sum_n \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_{in}(n) I_{in}^*(n))}{1 - |\Gamma(n)|^2} & \text{(反射損あり)} \end{cases} \quad (8.9)$$

損失性媒質がなく、かつ、反射損を考えないときは放射効率は1となり、電力利得と指向性利得は一致する。このとき、放射効率の1からの差は計算誤差の指標になる。

### 8.3 結合度

給電点の電圧、電流を $V_{in}, I_{in}$ 、抵抗の抵抗、電流を $R_L, I_L$ とすると、給電点と抵抗の結合度は次

式で計算される (Re:実部、\*:複素共役)。分子は抵抗で消費される電力、分母は給電電力の和である。

$$C_n = \frac{\frac{1}{2} R_L(n) |I_L(n)|^2}{\sum_i \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_{in}(i) I_{in}^*(i)\}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (8.10)$$

## 9 散乱特性

平面波入射のとき、遠方界より散乱断面積が次式で定義される。(E<sup>i</sup>:入射電界の大きさ)

$$\begin{aligned}\sigma(\theta, \phi) &= \frac{4\pi r^2}{(E^i)^2} \left\{ |E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right\} \\ &= \frac{k^2}{4\pi (E^i)^2} \left\{ |F_\theta(\theta, \phi)|^2 + |F_\phi(\theta, \phi)|^2 \right\}\end{aligned}\quad (9.1)$$

また、原点から見た入射方向を (θ<sup>i</sup>, φ<sup>i</sup>) とすると、次式で前方、後方および全散乱断面積が定義される。

$$\sigma_F = \sigma(\pi - \theta^i, \pi + \phi^i) \quad (9.2)$$

$$\sigma_B = \sigma(\theta^i, \phi^i) \quad (9.3)$$

$$\sigma_T = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \sigma(\theta, \phi) \quad (9.4)$$

特に、全散乱断面積と前方散乱電界との間に光学定理と呼ばれる関係式が成り立つ。

$$\sigma_T + \frac{P_{loss}}{\frac{1}{2Z}(E^i)^2} = \frac{-1}{E^i} \operatorname{Re} \left\{ F_{\left[ \begin{smallmatrix} \theta \\ \phi \end{smallmatrix} \right]}(\pi - \theta^i, \pi + \phi^i) \right\} \quad (9.5)$$

右辺の複号は入射波の偏波方向に対応する。P<sub>loss</sub>は式(6.5)で定義された全損失である。式(9.5)の誤差は計算誤差の指標になる。

## 10 伝送線路特性

図10.1のように伝送線路上に隣接する等間隔の3点を取り、それぞれの点の電界(複素数)を

$E_1, E_{1+}, E_{1-}$  とする。伝搬定数を  $\gamma = \alpha + j\beta$  とし、電界を進行波と反射波に分解すると次式のようになる。

$$E_1 = E^+ + E^- \quad (10.1)$$

$$E_{1+} = E^+ e^{-\gamma d} + E^- e^{\gamma d} \quad (10.2)$$

$$E_{1-} = E^+ e^{\gamma d} + E^- e^{-\gamma d} \quad (10.3)$$

式(10.1)-(10.3)より、

$$\frac{E_{1+} + E_{1-}}{E_1} = e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}$$

となり、伝搬定数は次式で計算される。

$$e^{\gamma d} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{E_{1+} + E_{1-}}{E_1} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{E_{1+} + E_{1-}}{E_1} \right)^2 - 4} \right\} \quad (10.4)$$

ただし、複号は  $\text{Im}(\gamma) > 0$  となる方を選ぶ。

次に、 $S_{11}$ は式(10.2)(10.3)より次式で計算される。

$$E^+ = \frac{E_{1+} e^{-\gamma d} - E_{1-} e^{\gamma d}}{e^{-2\gamma d} - e^{2\gamma d}} \quad (10.5)$$

$$E^- = \frac{E_{1+} e^{\gamma d} - E_{1-} e^{-\gamma d}}{e^{2\gamma d} - e^{-2\gamma d}} \quad (10.6)$$

$$S_{11} \equiv \frac{E^-}{E^+} = -\frac{E_{1+} e^{\gamma d} - E_{1-} e^{-\gamma d}}{E_{1+} e^{-\gamma d} - E_{1-} e^{\gamma d}} \quad (10.7)$$

その他のポートn( $n=2, 3, \dots$ )の代表点での電界を $E_n$ とおくと $S_{n1}$ は次式で計算される。

$$S_{n1} = \frac{E_n}{E^+} \quad (10.8)$$

## 参考文献

- [1] K.S.Yee, "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE Trans. Antennas Propagation, AP-14, no.3, pp.302-307, 1966.
- [2] K.Kunz and R.J.Luebbers, "Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics", CRC Press, 1993.
- [3] A.Taflove and S.C.Hagnes, "Computational Electrodynamics, The Finite-Difference Time-Domain Method, 2nd edition", Artech House, 2000.
- [4] 宇野亨「FDTD法による電磁界およびアンテナ解析」コロナ社、1998
- [5] G.Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic-field equations", IEEE Trans. Electromag. Compat., EMC-23, no.11, pp.377-382, 1981.
- [6] J.-P.Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", J. Computational Physics, vol.114, pp.185-200, 1994.
- [7] 森正武「FORTRAN77 数値計算プログラミング(増補版)」岩波書店、1988
- [8] 本間、五十嵐、川口「数値電磁力学－基礎と応用－」森北出版、2002
- [9] 戸川隼人「共役勾配法」教育出版、1977
- [10] 小国力編著「行列計算ソフトウェア」丸善、1991
- [11] 五十嵐、亀有、加川、西口、A.ボサビ「新しい計算電磁気学 基礎と数理」培風館、2003
- [12] W.L.Stutzman and G.A.Thiele, *Antenna Theory and Design, 2nd edition*, John Wiley & Sons, Inc., 1998.

## 付録A 正弦波のときのフーリエ変換

電界の複素数表示を  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  とすると、電界の時間表示は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} \quad (\text{A. 1})$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{t_c}^{t_c+T} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{t_c}^{t_c+T} \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_c}^{t_c+T} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\omega t} \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{T}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

となる。ここで、 $\bar{\cdot}$  は複素共役を表す。式(A.2)から入射波で正規化した電界は式(3.77)になる。

## 付録B 遠方界の軸比

遠方界を時間表示すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \text{Re} \left\{ (E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi}) e^{j\omega t} \right\} \\ &= \hat{\theta} \text{Re} (E_\theta e^{j\omega t}) + \hat{\phi} \text{Re} (E_\phi e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{B. 1})$$

となり、その大きさは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(t)|^2 &= \left\{ \text{Re} (E_\theta e^{j\omega t}) \right\}^2 + \left\{ \text{Re} (E_\phi e^{j\omega t}) \right\}^2 \quad (\hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = 0) \\ &= \left\{ \frac{E_\theta e^{j\omega t} + \bar{E}_\theta e^{-j\omega t}}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{E_\phi e^{j\omega t} + \bar{E}_\phi e^{-j\omega t}}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} (E_\theta \bar{E}_\theta + E_\phi \bar{E}_\phi) + \frac{1}{4} \left\{ (E_\theta^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_\theta^2 e^{-2j\omega t}) + (E_\phi^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_\phi^2 e^{-2j\omega t}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + \text{Re} \left\{ (E_\theta^2 + E_\phi^2) e^{2j\omega t} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B. 2})$$

式(B.2)から時間的的最大値と最小値は次式で与えられる。その比が軸比である。

$$E_{\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\}} = \left\{ \frac{1}{2} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \pm |E_\theta^2 + E_\phi^2|) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B. 3})$$

また、式(B-2)の時間的な平均値は次式で与えられる。

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left\{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \right\} \quad (\text{B. 4})$$

## 付録C 遠方界成分の関係

遠方界の各成分には以下の関係がある。

$$E_{max}^2 + E_{min}^2 = \frac{1}{2} \{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + |E_\theta + E_\phi|^2 \} + \frac{1}{2} \{ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 - |E_\theta + E_\phi|^2 \} \quad (C-1)$$

$$\begin{aligned} &= |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \\ &= |E_{RHCP}|^2 + |E_{LHCP}|^2 = \frac{1}{2} \{ |E_\theta + jE_\phi|^2 + |E_\theta - jE_\phi|^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (E_\theta + jE_\phi)(\bar{E}_\theta - j\bar{E}_\phi) + (E_\theta - jE_\phi)(\bar{E}_\theta + j\bar{E}_\phi) \} \\ &= E_\theta \bar{E}_\theta + E_\phi \bar{E}_\phi \\ &= |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \end{aligned} \quad (C-2)$$

## 付録D 電磁界ベクトルの時間平均

時刻  $t$  の電界ベクトルは以下のようにになる。ここで、 $E_x, E_y, E_z$  は複素数である。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \hat{x} \operatorname{Re}(E_x e^{j\omega t}) + \hat{y} \operatorname{Re}(E_y e^{j\omega t}) + \hat{z} \operatorname{Re}(E_z e^{j\omega t}) \\ &= \hat{x} \frac{1}{2} (E_x e^{j\omega t} + \bar{E}_x e^{-j\omega t}) + \hat{y} \frac{1}{2} (E_y e^{j\omega t} + \bar{E}_y e^{-j\omega t}) + \hat{z} \frac{1}{2} (E_z e^{j\omega t} + \bar{E}_z e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (D-1)$$

式(D-1)の長さの2乗は以下のようにになる。

$$|\mathbf{E}(t)|^2 = \frac{1}{4} \left( E_x^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_x^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_x|^2 + E_y^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_y^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_y|^2 + E_z^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_z^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_z|^2 \right) \quad (D-2)$$

式(D-2)の時間平均は以下のようにになる。

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \right) \quad (D-3)$$

ここで式(D-4)のように定義すると式(D-3)は式(D-5)になる。

$$E = \left( |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \right)^{1/2} \quad (D-4)$$

$$\langle |\mathbf{E}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} E^2 \quad (D-5)$$

すなわち式(D-4)は電界ベクトルの”振幅”とみなすことができる。

磁界  $\mathbf{H}$  についても同様である。

## 付録E 特定方向の電磁界成分の時間平均

方向(E-1)の電界は式(E-2)となる。

$$\hat{e} = (e_x, e_y, e_z) \quad (|\hat{e}|=1) \quad (E-1)$$

$$\begin{aligned} \hat{e} \cdot \mathbf{E}(t) &= e_x \operatorname{Re}(E_x e^{j\omega t}) + e_y \operatorname{Re}(E_y e^{j\omega t}) + e_z \operatorname{Re}(E_z e^{j\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e_x (E_x e^{j\omega t} + \bar{E}_x e^{-j\omega t}) + e_y (E_y e^{j\omega t} + \bar{E}_y e^{-j\omega t}) + e_z (E_z e^{j\omega t} + \bar{E}_z e^{-j\omega t}) \right\} \end{aligned} \quad (E-2)$$

式(E-2)の2乗は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
\{\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E}(t)\}^2 &= \frac{1}{4} e_x^2 (E_x^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_x^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_x|^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} e_y^2 (E_y^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_y^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_y|^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} e_z^2 (E_z^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}_z^2 e^{-2j\omega t} + 2|E_z|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} e_x e_y (E_x \bar{E}_y + \bar{E}_x E_y + E_x E_y e^{2j\omega t} + \bar{E}_x \bar{E}_y e^{-2j\omega t}) \\
&\quad + \frac{1}{2} e_y e_z (E_y \bar{E}_z + \bar{E}_y E_z + E_y E_z e^{2j\omega t} + \bar{E}_y \bar{E}_z e^{-2j\omega t}) \\
&\quad + \frac{1}{2} e_z e_x (E_z \bar{E}_x + \bar{E}_z E_x + E_z E_x e^{2j\omega t} + \bar{E}_z \bar{E}_x e^{-2j\omega t})
\end{aligned} \tag{E-3}$$

式(E-3)の時間平均は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle \{\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E}(t)\}^2 \rangle &= \frac{1}{2} (e_x^2 |E_x|^2 + e_y^2 |E_y|^2 + e_z^2 |E_z|^2) \\
&\quad + \{e_x e_y \operatorname{Re}(E_x \bar{E}_y) + e_y e_z \operatorname{Re}(E_y \bar{E}_z) + e_z e_x \operatorname{Re}(E_z \bar{E}_x)\}
\end{aligned} \tag{E-4}$$

磁界Hについても同様である。